PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME–TIPO 1

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Trata-se de uma permutação com repetições, ou seja, é uma sequência de oito letras em que a letra A repete-se duas vezes e a letra C três vezes. O número de chaves distintas é dado por $\frac{8!}{2!\times 3!} = 3360$.

Outra resolução: Começa-se por escolher duas posições entre as oito para as letras A $({}^{8}C_{2})$, em seguida três posições entre as restantes seis para as letras C $({}^{6}C_{3})$. Finalmente as três letras que faltam, que são distintas, permutam nas restantes três posições de $3!$ maneiras. O número de chaves distintas é dado por:

$${}^{8}C_{2} \times {}^{6}C_{3} \times 3! = 3360$$

Resposta: A

2. O número de casos possíveis é ${}^{30}C_{5}$. Para a Helena ganhar o terceiro prémio, dos cinco números que apostou têm de ser sorteados três e dos 25 que não apostou têm de ser sorteados dois. Portanto o número de casos possíveis é ${}^{5}C_{3} \times {}^{25}C_{2}$.

Resposta: B

3. Sabe-se que $\frac{1}{6} + a - b + \frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow 6a - 3b = 5$. A média da variável aleatória X é $\frac{17}{6}$, portanto:

$$a \times \frac{1}{6} + 3(a-b) + 4 \times \frac{b}{2} = \frac{17}{6} \Leftrightarrow \frac{a}{6} + 3a - 3b + 2b = \frac{17}{6} = 19a - 6b = 17$$

Assim:

$$\begin{cases} 6a - 3b = 5 \\ 19a - 6b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{6a-5}{3} \\ 19a - 6b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 19a - 6 \times \frac{6a-5}{3} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 19a - 12a + 10 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

Resposta: D

4. Tem-se $\log_4(a \times b) = 6 \Leftrightarrow a \times b = 4^6$. Assim:

$$\log_8(a \times b^2) - \log_8(64b) = \log_8\left(\frac{a \times b^2}{64b}\right) = \log_8\left(\frac{a \times b}{64}\right) = \log_8\left(\frac{4^6}{64}\right) = \log_8 64 = \log_8(8^2) = 2$$

Resposta: B

5. A resposta correta é a $\boxed{\text{D}}$, pois $u_n = -\ln(n) \to -\infty$ e portanto, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim g(u_n) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$

Resposta: D

6. Tem-se $g'(x) = -2e^{-2x} + 2$ e portanto:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow -2x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$$

Como o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$, então $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ e $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h'', vem:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h''(x)$	$+$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

No intervalo $[1, +\infty[$, o gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima.

Resposta: A

7. Tem-se $w = 2 - i + xi = 2 + (x-1)i$, portanto $\overline{w} = 2 - (x-1)i$. Assim:

$$w - 2\overline{w} = 2 + (x-1)i - 2(2 - (x-1)i) = 2 + xi - i - 4 + 2xi - 2i =$$

$$= -2 + 3xi - 3i = -2 + (3x-3)i$$

A imagem geométrica de $w - 2\overline{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares se $\text{Im}(w - 2\overline{w}) = -\text{Re}(w - 2\overline{w})$. Portanto:

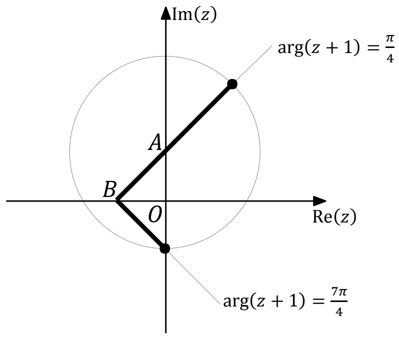
$$\text{Im}(w - 2\overline{w}) = -\text{Re}(w - 2\overline{w}) \Leftrightarrow 3x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Resposta: D

8. A condição $|z - i| \leq 2$ representa um círculo de raio 2 centrado na imagem geométrica de i. A condição

$$\arg(z+1) = \frac{\pi}{4} \ \vee \ \arg(z+1) = \frac{7\pi}{4}$$

representa duas semirretas com origem na imagem geométrica de -1 e que fazem um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ com o semieixo real positivo, respetivamente. Na figura o ponto A é a imagem geométrica de i e o ponto B é a imagem geométrica de -1.



Resposta: C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.

1.1. $z_1 - z_2 = \frac{4+2i}{1-i} + 2i^{74} - 2\text{cis}\frac{\pi}{2} = \frac{4+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} - 2 - 2i = \frac{4+4i+2i+2i^2}{1^2-i^2} - 2 - 2i = \frac{2+6i}{2} - 2 - 2i =$

$$= 1 + 3i - 2 - 2i = -1 + i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$$

Cálculos Auxiliares:

- $i^{74} = i^{4\times18+2} = i^2 = -1$

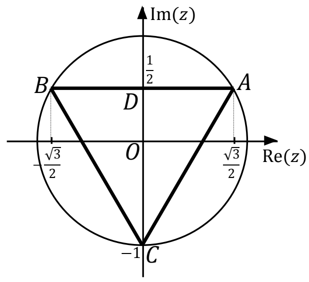
- Para escrever $-1+i$ na forma trigonométrica, vem: $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-1+i$, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{-1} = -1$ e $\theta \in 2.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Assim $-1+i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$.

1.2. $2z^3 - z_2 = 0 \Leftrightarrow z^3 = \frac{2\text{cis}\frac{\pi}{2}}{2} \Leftrightarrow z^3 = \text{cis}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\text{cis}\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1}\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow z = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$$

Portanto as soluções da equação são $\text{cis}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\text{cis}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $\text{cis}\frac{3\pi}{2} = -i$. Na figura, o ponto A é a imagem geométrica de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, o ponto B é a imagem geométrica de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e o ponto C a de $-i$.

O triângulo $[ABC]$ é equilátero, assim:

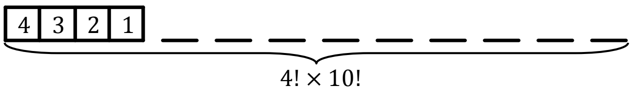


- $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

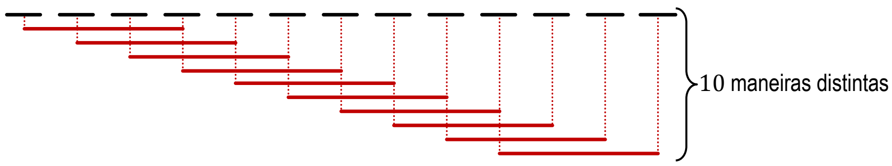
- $P_{[ABC]} = 3 \times \overline{AB} = 3\sqrt{3}$

2.

2.1. O número de casos possíveis é $13!$. Agrupando num bloco as três figuras e o ás de espadas, o bloco e as restantes nove cartas permutam entre si de $10!$ Maneiras. Para cada uma destas maneiras as quatro cartas do bloco permutam entre si de $4!$ maneiras. Logo o número de casos favoráveis é $4! \times 10!$ (observa a figura seguinte) e portanto a probabilidade pedida é $\frac{4! \times 10!}{13!} = \frac{2}{143}$.



Outra resolução: Considerando apenas os lugares que as figuras e o ás podem ocupar, tem-se que o número de casos possíveis é ${}^{13}C_4$ (número de maneiras de escolher quatro lugares entre treze). O número de casos favoráveis é 10 (ficando as quatro cartas juntas, elas podem ocupar os lugares do $1.^{\text{o}}$ ao $4.^{\text{o}}$ lugares, ou do $2.^{\text{o}}$ ao $5.^{\text{o}}$ lugares, ou do $3.^{\text{o}}$ ao $6.^{\text{o}}$ lugares, ou do $4.^{\text{o}}$ ao $7.^{\text{o}}$ lugares, ou do $5.^{\text{o}}$ ao $8.^{\text{o}}$ lugares, ou do $6.^{\text{o}}$ ao $9.^{\text{o}}$ lugares, ou do $7.^{\text{o}}$ ao $10.^{\text{o}}$ lugares, ou do $8.^{\text{o}}$ ao $11.^{\text{o}}$ lugares, ou do $9.^{\text{o}}$ ao $12.^{\text{o}}$ lugares, ou do $10.^{\text{o}}$ ao $13.^{\text{o}}$ lugares). Portanto a probabilidade pedida é $\frac{10}{{}^{13}C_4} = \frac{2}{143}$. Observa a figura seguinte:



2.2. $P\left(C \middle| (A \cap B)\right)$ designa a probabilidade das quatro cartas retiradas serem de naipes distintos, sabendo que a primeira carta é do naipe espadas e a segunda carta é do naipe copas. Como já foram retiradas duas cartas, ficam no baralho 50 cartas. Logo, o número de casos possíveis é ${}^{50}A_2$ (das restantes 50 cartas, extraem-se, ordenadamente duas). Visto que as duas primeiras cartas retiradas foram do naipe espadas e do naipe copas, respetivamente, então as duas seguintes terão de ser do naipe paus e do naipe ouros (ou vice-versa). Cada um desses naipes tem treze cartas, assim o número de casos favoráveis é $2 \times 13 \times 13 = 2 \times 13^2$. Pela lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer uma das cartas tem igual probabilidade de ser escolhida, a lei de Laplace pode ser aplicada a este problema. Portanto, $P\left(C \middle| (A \cap B)\right) = \frac{2 \times 13^2}{{}^{50}A_2}$.

3. Tem-se:

$$(1 - P(B)) \times P(A|\bar{B}) + P(\bar{A} \cup B) =$$

$$= P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) + P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) =$$

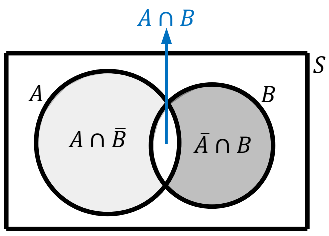
$$= P(\bar{B}) \times \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} + P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) =$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) =$$

$$\underset{\text{i)}}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(\bar{A}) + P(B) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big) =$$

$$= \cancel{P(A)} - \cancel{P(A \cap B)} + 1 - \cancel{P(A)} + \cancel{P(B)} - \cancel{P(B)} + \cancel{P(A \cap B)} = 1$$

i)



$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

4.

- A reta de equação $y = 2x + 4$ é assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $x \to +\infty$. Assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 4$. Determinando o declive e a ordenada na origem da assíntota oblíqua do gráfico de f em função de a e b, vem:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{ax^2+bx+c}{x+2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2+2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a.$$ Logo $a = 2$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+bx+c}{x+2} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+bx+c-2x^2-4x}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(b-4)+c}{x+2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(b-4)}{x} = b - 4$$

Portanto $b - 4 = 4 \Leftrightarrow b = 8$.

▪ Como a função f é contínua em IR^+ então também é contínua em $x = 1$ e portanto:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

Assim:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{cx-c}-1}{x-1} \underset{\text{i)}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{c(y+1)-c}-1}{y} = \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{cy-c+c}-1}{y} = c \times \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{cy}-1}{cy} = c \times 1 = c.$$

Se $y \to 0$ então $cy \to 0$

i) Mudança de variável: Se $x \to 1^-$ então $x - 1 \to 0^-$. Seja $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$, $y \to 0^-$.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2+8x+c}{x+2} = \frac{10+c}{3}$$

$$f(1) = \frac{10+c}{3}$$

Logo, $\frac{10+c}{3} = c \Leftrightarrow 10 + c = 3c \Leftrightarrow -2c = -10 \Leftrightarrow c = 5$

5.

5.1. Tem-se:

▪ $g'(x) = 2x - 4 \times \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+2x-4}{x+1}$

▪ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x-4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \ \wedge \ x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x = -2 \ \vee \ x = 1) \ \wedge \ x \neq -1$

Como $x \in \left]-1, +\infty\right[$, tem-se $x = 1$.

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g', vem:

x	-1		1	$+\infty$
$2x^2 + 2x - 4$	n.d.	–	0	+
$x + 1$	n.d.	+	+	+
$g'(x)$	n.d.	–	0	+
$g(x)$	n.d.	↘	min.	↗

A função g é decrescente em $\left]-1, 1\right]$, é crescente em $\left[1, +\infty\right[$ e tem mínimo relativo em $x = 1$.

5.2. Tem-se $g(x) = g'(x) \Leftrightarrow g(x) - g'(x) = 0$. Seja $h(x) = g(x) - g'(x)$.

A função h é contínua em $]-1, +\infty[$ pois é diferença entre funções continuas em $]-1, +\infty[$. Logo, h é contínua em $[3, 4] \subset]-1, +\infty[$. Tem-se:

- $h(3) = g(3) - g'(3) = 9 - 4\ln(4) - \frac{18+6-4}{4} = 4 - 4\ln(4) \approx -1{,}55$

- $h(4) = g(4) - g'(4) = 16 - 4\ln(5) - \frac{32+8-4}{5} = \frac{44}{5} - 4\ln(5) \approx 2{,}36$

Assim, como $h(3)$ e $h(4)$ têm sinais contrários (e portanto $h(3) \times h(4) < 0$), pelo corolário do teorema de Bolzano $\exists\, c \in]3, 4[:\ h(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) - g'(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = g'(c)$, ou seja, a equação $g(x) = g'(x)$ tem pelo menos uma solução em $[3, 4]$.

6.

6.1. $\lim\limits_{t\to+\infty} L(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{600}{1+a\times e^{-bt}} = \frac{600}{1+a\times e^{-b\times(+\infty)}} \underset{b>0}{=} \frac{600}{1+a\times e^{-\infty}} = \frac{600}{1+a\times 0} = \frac{600}{1} = 600$

À medida que o tempo passa, o número de leões existentes no parque tende para 600.

6.2. Tem-se:

$$\begin{cases} L(0) = 40 \\ L(10) = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{600}{1+a\times e^{-b\times 0}} = 40 \\ \frac{600}{1+a\times e^{-b\times 10}} = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{600}{1+a\times 1} = 40 \\ \frac{600}{1+a\times e^{-10b}} = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600 = 40\times(1+a) \\ \frac{600}{300} = 1 + a\times e^{-10b} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 600 = 40 + 40a \\ 2 = 1 + a\times e^{-10b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 560 = 40a \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ 2 = 1 + 14e^{-10b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ e^{-10b} = \frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ -10b = \ln\left(\frac{1}{14}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = \frac{\ln\left(\frac{1}{14}\right)}{-10} \approx 0{,}26 \end{cases}$$

7.

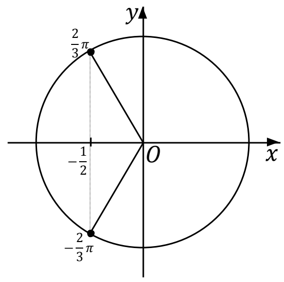
7.1. Tem-se:

$$f(x) = -3\text{sen}x \Leftrightarrow 3\text{sen}(2x) = -3\text{sen}x \Leftrightarrow 3 \times 2\text{sen}x\cos x + 3\text{sen}x = 0 \Leftrightarrow 3\text{sen}x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\text{sen}x = 0 \ \vee \ 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \ \vee \ \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \ \vee \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Outra resolução: $f(x) = -3\text{sen}x \Leftrightarrow 3\text{sen}(2x) = -3\text{sen}x \Leftrightarrow 3\text{sen}(2x) = 3\text{sen}(-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(2x) = \text{sen}(-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = -x + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi + x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \ \vee \ x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo k por números inteiros, e sabendo que $x \in \left[-2\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, obtemos:

$$x = -2\pi \ \vee \ x = -\frac{4\pi}{3} \ \vee \ x = -\pi \ \vee \ x = -\frac{2\pi}{3} \ \vee \ x = 0$$

Portanto, o conjunto solução da condição $f(x) = -3\text{sen}x \ \wedge \ x \in \left[-2\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ é $\left\{-2\pi, \ -\frac{4\pi}{3}, \ -\pi, \ -\frac{2\pi}{3}, \ 0\right\}$.

7.2.

▪ Seja D o ponto de interseção do segmento de reta $[PQ]$ com o segmento de reta $[OB]$. O ponto Q é simétrico do ponto P em relação à reta OB, portanto $\overline{PQ} = 2\overline{PD}$ e $\overline{OR} = \overline{PD}$ e $\overline{QR} = \overline{OD}$. Assim:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{PQ}+\overline{OR}}{2} \times \overline{QR} = \frac{2\overline{PD}+\overline{PD}}{2} \times \overline{OD} = \frac{3\overline{PD}}{2} \times \overline{OD} = \frac{3\times 2\cos\alpha}{2} \times 2\text{sen}\alpha =$$

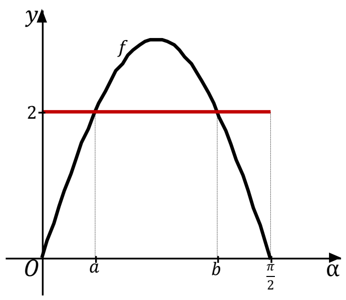
$$= 3 \times 2\cos\alpha\,\text{sen}\alpha = 3\text{sen}(2\alpha) = f(\alpha)$$

Cálculos auxiliares:

▪ $\cos\alpha = \frac{\overline{PD}}{2} \Leftrightarrow \overline{PD} = 2\cos\alpha$

▪ $\text{sen}\alpha = \frac{\overline{OD}}{2} \Leftrightarrow \overline{OD} = 2\text{sen}\alpha$

▪ Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f(\alpha) = 3\text{sen}(2\alpha)$ e $y_2 = 2$ na janela de visualização $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 4]$.



Assim, $f(\alpha) > 2 \Leftrightarrow \alpha \in \,]a, b[$, com $a \approx 0{,}36$ e $b \approx 1{,}21$.