PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME – TIPO 2

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A soma dos todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal é dada por 2^n. Assim vem:

$$2^n = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11.$$

Logo trata-se da linha 11. Portanto a soma dos cinco últimos elementos da linha seguinte (a linha 12) é:

$${}^{12}C_{12} + {}^{12}C_{11} + {}^{12}C_{10} + {}^{12}C_9 + {}^{12}C_8 = 794$$

Resposta: C

Nota: A soma dos p últimos elementos de uma linha n do triângulo de Pascal, com $n \geq p$, é igual à soma dos p primeiros elementos dessa linha, pois ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}, \forall\, n \geq p$.

2. Tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{11}{15} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

Assim $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{15}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{9}$.

Resposta: B

3. Tem-se $0,1 + 0,1 + a + 0,2 + 2a + 3a = 1 \Leftrightarrow 6a = 0,6 \Leftrightarrow a = 0,1$. Considere-se a variável aleatória:

X: «número de vezes que sai face numerada com o número 6 em cinco lançamentos do dado»

A variável aleatória X segue uma distribuição binomial de parâmetros $n = 5$ e $p = 3a \Leftrightarrow p = 3 \times 0,1 = 0,3$, isto é, $X \sim \text{Bin}(5; 0,3)$. Pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento «sair face numerada com o número 6» ocorrer exatamente duas vezes, isto é, $P(X = 2)$. Assim:

$$P(X = 2) = {}^5C_2 \times (0,3)^2 \times (1 - 0,3)^3 = 0,3087$$

Resposta: D

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{f(x)} = \frac{e^{-\infty} + e^{+\infty}}{0^-} = \frac{0 + \infty}{0^-} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$

Resposta: B

5. Fazendo um quadro de variação da monotonia da função f, vem:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	máx.	$\rightarrow$	min.	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	n.d.	0	0	$+$

A função f' é positiva em $]-\infty, -2[$ e em $]0, +\infty[$ e é nula em $]-2,0]$. Observa ainda que $f'(-2)$ não existe, pois o ponto de abcissa -2 é anguloso. Das opções apresentadas a única que está de acordo com a tabela é a $\boxed{\text{A}}$.

Nota: Apesar de não ser necessário para a resolução deste exercício é de notar que a função f, para valores de x inferiores a -2, é uma função afim e portanto da forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathrm{IR}^+$, pelo que, para valores de x inferiores a -2, $f'(x) = a$.

Resposta: A

6. Seja O o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ e portanto a amplitude do ângulo $A\hat{C}O$ é $\frac{x}{2}$. Tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\overline{AO}}{2} \Leftrightarrow \overline{AO} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ e } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\overline{CO}}{2} \Leftrightarrow \overline{CO} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim:

$$V_{\text{cone}} = \frac{A_{\text{base}} \times \overline{CO}}{3} = \frac{\pi \times \overline{AO}^2 \times \overline{CO}}{3} = \frac{\pi \times \left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \times 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3} = \frac{8\pi \times \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3} = \frac{4\pi\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3} =$$

$$= \frac{4\pi\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{x}{2}\right)}{3} = \frac{4\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times \operatorname{sen} x$$

Resposta: C

7. A imagem geométrica do número complexo $z = a + bi$ pertence ao primeiro quadrante, pois $a > 0$ e $b > 0$.
Assim:

- $z - i = a + bi - i = a + (b-1)i$. Se $b > 1$ então $a > 0$ e $b - 1 > 0$ e portanto a imagem geométrica de $z - i$ pertence ao $1.°$ quadrante. Se $0 < b < 1$ então $a > 0$ e $b - 1 < 0$ e portanto a imagem geométrica $z - i$ pertence ao $4.°$ quadrante. Se $b = 1$ então $z - i = a$ e portanto $z - i$ é um número real positivo, pois $a > 0$, logo a sua imagem geométrica pertence ao semieixo real positivo;

- $z \times i^{22} = z \times i^{4\times5+2} = z \times i^2 = -z$. Assim $z \times i^{22}$ é simétrico de z e portanto a sua imagem geométrica pertence ao $4.°$ quadrante;

- $z + i = a + bi + i = a + (b+1)i$. Como $b > 0$ vem $a > 0$ e $b + 1 > 0$ e portanto a imagem geométrica de $z + i$ pertence ao $1.°$ quadrante;

▪ $z \times i^{13} = z \times i^{4\times 3+1} = z \times i$. Multiplicar z por i corresponde a rodar $90°$ em torno da origem a imagem geométrica de z, logo a imagem geométrica de $z \times i^{13}$ pertence ao $2.°$ quadrante.

Outra resolução para a opção D: Tem-se $z \times i^{13} = z \times i = (a+bi) \times i = ai + bi^2 = -b + ai$. A imagem geométrica de $z \times i^{13}$ pertence ao $2.°$ quadrante pois $-b < 0$ e $a > 0$.

Resposta: D

8. O raio da circunferência é igual a $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Assim o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $5\text{cis}\frac{\pi}{2}$ e portanto o ponto B é a imagem geométrica do número complexo $5\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + 4 \times \frac{2\pi}{9}\right) = 5\text{cis}\frac{25\pi}{18}$ (o eneágono divide a circunferência em nove arcos de circunferência de amplitude $\frac{2\pi}{9}$, os seus vértices são as imagens geométricas das raízes de índice nove de um mesmo número complexo).

Resposta: A

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Tem-se $z_2 = 3 + \sqrt{3}i \underset{\text{i)}}{=} 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{6}$, logo:

$$\left(\frac{-\text{cis}\frac{\pi}{4} \times z_2}{\overline{z_1}}\right)^n = \left(\frac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) \times 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{6}}{2\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}{2\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}\right)^n = \left(\sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)^n = \left(\sqrt{3}\text{cis}\frac{11\pi}{6}\right)^n =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^n \text{cis}\left(\frac{11n\pi}{6}\right)$$

$\left(\frac{-\text{cis}\frac{\pi}{4} \times z_2}{\overline{z_1}}\right)^n$ é um número real se o seu argumento for da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$\frac{11n\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11n}{6} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $n = 6\ (k = 11)$.

i) Cálculo auxiliar: Para escrever $3+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica, vem: $|3+\sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$. Sendo θ um argumento de $3+\sqrt{3}i$, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 1.°$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Assim $3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{6}$.

1.2.

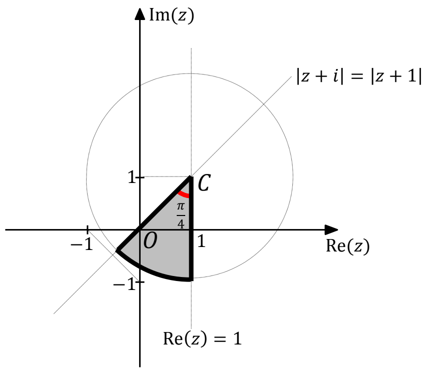
▪ $|z+i| \leq |z+1| \Leftrightarrow |z-(-i)| \leq |z-(-1)|$

▪ $|z-1-i| \leq |z_1| \Leftrightarrow |z-(1+i)| \leq 2$

▪ $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z_2-2) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}\left(3+\sqrt{3}i-2\right) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}\left(1+\sqrt{3}i\right) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \leq 1$

Na figura o ponto C é a imagem geométrica do número complexo $1+i$.

$$A_{\text{colorida}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \times 2^2 = \frac{\pi}{8} \times 4 = \frac{\pi}{2}$$



2.

2.1. Na fila da frente os doze elementos da seleção podem sentar-se de $4!$ maneiras distintas. Nos quatro lugares centrais o treinador e os três guarda-redes permutam de $4!$ formas distintas. Os restantes oito elementos (os defesas) ocuparam os oito lugares apenas de uma maneira, porque se sentam por ordem crescente de numeração nas camisolas. Na fila de trás pretende-se que os sete médios fiquem juntos, assim, agrupando-os num bloco, o bloco e os restantes cinco elementos da seleção permutam entre si de $6!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, os sete elementos do bloco permutam entre si de $7!$ formas distintas. Assim, na fila de trás os doze elementos podem sentar-se de $6! \times 7!$ maneiras distintas. Portanto os 24 elementos da seleção podem, nas condições pretendidas, tirar a foto de $4! \times 6! \times 7! = 87\ 091\ 200$ maneiras distintas.

2.2. A variável aleatória X toma os valores 0, 1 ou 2, ou seja, $X = \{0, 1, 2\}$. Assim:

$$P(X=0) = \frac{^{12}C_2}{^{23}C_2} = \frac{6}{23}, \quad P(X=1) = \frac{^{11}C_1 \times {^{12}C_1}}{^{23}C_2} = \frac{12}{23} \quad \text{e} \quad P(X=2) = \frac{^{11}C_2}{^{23}C_2} = \frac{5}{23}$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{23}$	$\frac{12}{23}$	$\frac{5}{23}$

O valor médio da variável aleatória X é dado por $\mu = 0 \times \frac{6}{23} + 1 \times \frac{12}{23} + 2 \times \frac{5}{23} = \frac{22}{23}$.

3. O número de casos possíveis é ${}^{26}C_4$ (número de maneiras de escolher quatro pessoas entre 26). Para o número de casos favoráveis tem que se considerar três casos:

- o grupo é constituído por um rapaz e três raparigas. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{13}C_1 \times {}^{13}C_3 = 13 \times {}^{13}C_3$;

- o grupo é constituído por dois rapazes e duas raparigas. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2 = ({}^{13}C_2)^2$;

- o grupo é constituído por três rapazes e uma rapariga. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1 = 13 \times {}^{13}C_3$.

Portanto o número de casos favoráveis é $({}^{13}C_2)^2 + 2 \times 13 \times {}^{13}C_3$. Pela lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer um dos alunos tem igual probabilidade de ser escolhido, a lei de Laplace pode ser aplicada a este problema. Assim, uma resposta possível a este problema é $\frac{({}^{13}C_2)^2 + 2\times 13 \times {}^{13}C_3}{{}^{26}C_4}$.

4.

- A função f é injetiva, portanto tem inversa. Determinado a expressão analítica da função inversa de f, vem:

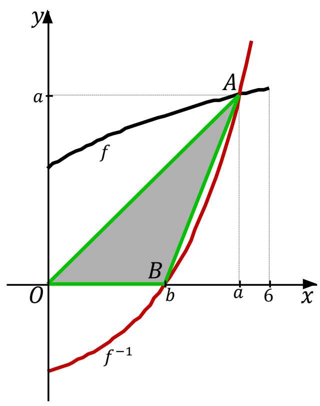
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 + 2\ln(x+3) \Leftrightarrow \ln(x+3) = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x + 3 = \mathrm{e}^{\frac{y-1}{2}} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{y-1}{2}} - 3$$

Assim, sendo f^{-1} a função inversa de f tem-se $D_{f^{-1}} = \mathrm{IR}$ e $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}} - 3$.

- Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f(x)$ e $y_2 = f^{-1}(x)$ na janela de visualização $[0, 6] \times [-3, 7]$.

As coordenadas do ponto A são (a, a), com $a \approx 5{,}21$ e as coordenadas do ponto B são $(b, 0)$, com $b \approx 3{,}2$. Assim:

$$A_{[AOB]} = \frac{b \times a}{2} \approx 8$$



5.

5.1. Como a função g é contínua à direita do ponto 0, então $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

- $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}\right) = \sqrt{9}-\sqrt{1} = 2$

- $g(0) = a^2 - a$

Portanto, $a^2 - a = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \ \vee \ a = 2$. Como $a > 0$, vem $a = 2$.

5.2.

- Assíntotas verticais:

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + 2\ln(-x)\right) = 0 + 2\ln(0^+) = 2\times(-\infty) = -\infty$. Logo a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função g. Como a função g é contínua em $IR\backslash\{0\}$, então o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais:

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2\ln(-x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2\ln(-x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2\ln(-x)}{x}\right) \underset{\text{i)}}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(-y-2\frac{\ln y}{y}\right) =$$

$$= -\infty - 2\times 0 = -\infty$$

i) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $-x \to +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \to +\infty$.

Logo, quando $x \to -\infty$, o gráfico de g não tem assíntotas não verticais.

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+9-x-1}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{8}{+\infty\left(\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}\right)} = \frac{8}{+\infty} = 0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9-x-1}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}}=\frac{8}{\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}}=\frac{8}{+\infty}=0$$

Logo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de g, quando $x\to+\infty$.

5.3. Para $x\in\,]-\infty,0[$, tem-se:

- $g'(x)=2x+2\times\frac{-1}{-x}=2x+\frac{2}{x}$; $g''(x)=2-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^2-2}{x^2}$

- $g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-2}{x^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\ \wedge\ x^2\neq0\Leftrightarrow x^2=1\ \wedge\ x\neq0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x=-1\ \vee\ x=1)\ \wedge\ x\neq0$$

Como $x\in\,]-\infty,0[$, tem-se $x=-1$.

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	-1		0
$2x^2-2$	$+$	0	$-$	n.d.
x^2	$+$	$+$	$+$	n.d.
$g''(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$g(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	n.d.

Para $x\in\,]-\infty,0[$, o gráfico função g tem a concavidade voltada para baixo em $[-1,0[$, tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1]$ e tem ponto de inflexão em $x=-1$.

6.

6.1.

▪ $C(2{,}5) = 2 \times (2{,}5)^2 \mathrm{e}^{-0{,}48\times 2{,}5} = 12{,}5\ \mathrm{e}^{-1{,}2} \approx 3{,}76$

Às $12\text{h}30\text{min}$ a concentração de medicamento no sangue do Pedro era de, aproximadamente, $3{,}76$ mg/L.

▪ $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (2t^2\mathrm{e}^{-0{,}48t}) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t^2}{\mathrm{e}^{0{,}48t}} = 2 \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\underbrace{(\mathrm{e}^{0{,}48})}_{>1}{}^{t}} = 2\times 0 = 0$

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, com $a > 1$ e $p \in \mathbb{R}$

À medida que o tempo passa, a concentração de medicamento no sangue do Pedro tende para zero.

6.2. Como $t = 0$ corresponde às 10h da manhã, então $t = 1$ corresponde às 11h da manhã e $t = 2$ às 12h. Além disso, $0{,}002$ g/L $= 2$ mg/L.

A função C é contínua em $[0, +\infty[$ pois é produto entre funções contínuas em $[0, +\infty[$. Logo, C é contínua em $[1, 2] \subset [0, +\infty[$. Tem-se:

▪ $C(1) = 2 \times 1^2 \times \mathrm{e}^{-0{,}48\times 1} = 2\mathrm{e}^{-0{,}48} \approx 1{,}24$

▪ $C(2) = 2 \times 2^2 \times \mathrm{e}^{-0{,}48\times 2} = 8\mathrm{e}^{-0{,}96} \approx 3{,}06$

Assim como $C(1) < 2 < C(2)$ então pelo teorema de Bolzano $\exists\, c \in]1, 2[\colon C(c) = 2$, portanto existe um instante entre as 11h e as 12h em que a concentração de medicamento no sangue do Pedro é de 2 mg/L $= 0{,}002$ g/L.

6.3.

▪ $C'(t) = (2t^2)' \times \mathrm{e}^{-0{,}48t} + 2t^2 \times (\mathrm{e}^{-0{,}48t})' = 4t\mathrm{e}^{-0{,}48t} + 2t^2 \times (-0{,}48\ \mathrm{e}^{-0{,}48t}) =$

$$= 4t\mathrm{e}^{-0{,}48t} - 0{,}96t^2\mathrm{e}^{-0{,}48t} = \mathrm{e}^{-0{,}48t} \times (4t - 0{,}96t^2)$$

▪ $C'(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}48t} = 0}_{\text{eq. impossível}} \ \vee\ 4t - 0{,}96t^2 = 0 \Leftrightarrow t(4 - 0{,}96t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \ \vee\ 4 - 0{,}96t = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee\ t = \frac{25}{6}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função C', vem:

t	0		$\frac{25}{6}$	$+\infty$
i) $C'(t)$	0	$+$	0	$-$
$C(t)$	min.	↗	máx.	↘

i) Observa que o sinal de C' depende apenas do sinal de $4t - 0{,}96t^2$ porque $\mathrm{e}^{-0{,}48t} > 0, \forall\, t \geq 0$.

A função C tem máximo em $t = \frac{25}{6}$. Conservando três casas decimais, $\frac{25}{6} \approx 4{,}167$, que corresponde a 4 horas e a $0{,}167 \times 60 \approx 10$ minutos, isto é, a concentração de medicamento atingiu o valor máximo às $14\text{h}10\text{min}$. O valor dessa concentração é dada por $C\left(\frac{25}{6}\right) = 2 \times \left(\frac{25}{6}\right)^2 \mathrm{e}^{-0{,}48 \times \frac{25}{6}} \approx 4{,}7$ mg/L.