PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME–TIPO 3

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O número de casos possíveis é 7^5. Como se pretende que o número seja par, então para o algarismo das unidades existem três hipóteses possíveis (2, 6 ou 8). Para cada uma destas hipóteses existem ${}^6A_4$ maneiras de escolher os restantes quatro algarismos (dos restantes seis escolhem-se ordenadamente quatro). Assim, o número de casos favoráveis é $3 \times {}^6A_4$ e portanto, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{3\times {}^6A_4}{7^5}$.

Resposta: A

2. $P(\bar{A}) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}3$ e $P(B) = 0{,}5 \Leftrightarrow P(\bar{B}) = 0{,}5$. Tem-se que:

$$\text{máx}\{P(X), P(Y)\} \leq P(X \cup Y) \leq \min\{1, P(X) + P(Y)\}, \forall X, Y \subset S$$

Assim, neste caso, tem-se $P(\bar{B}) \leq P(A \cup \bar{B}) \leq P(A) + P(\bar{B}) \Leftrightarrow 0{,}5 \leq P(A \cup B) \leq 0{,}8$.

Portanto, dos valores apresentados, o único que pode ser o valor da probabilidade do acontecimento $A \cup \bar{B}$ é $0{,}7$.

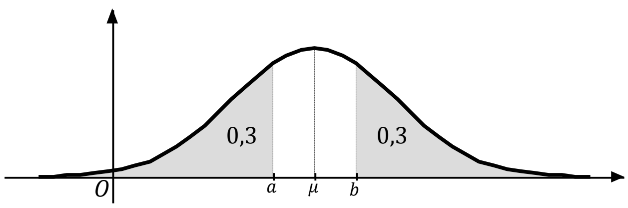
Nota: Tem-se que $\text{máx}\{0, P(X) + P(Y) - 1\} \leq P(X \cap Y) \leq \min\{P(X), P(Y)\}$, $\forall\, X, Y \subset S$. Neste caso $P(A) + P(\bar{B}) - 1 = -0{,}2$ e portanto $\text{máx}\{0, P(A) + P(\bar{B}) - 1\} = 0$. Assim, $0 \leq P(A \cap \bar{B}) \leq P(A) \Leftrightarrow 0 \leq P(A \cap \bar{B}) \leq 0{,}3$.

Resposta: C

3. Seja μ o valor médio da variável aleatória X. A curva de Gauss associada à variável aleatória X é simétrica em relação à reta de equação $x = \mu$. Observa a figura seguinte.

Assim, como $P(X < a) = P(X > b) = 0{,}3$ e $a < b$ tem-se que $a < \mu < b$ e que $|\mu - a| = |\mu - b|$.

Portanto, $\mu = \frac{a+b}{2}$.



Resposta: D

4. Por observação da figura verifica-se que $A(4, f(4))$, $B(8, f(4))$, $C(8, f(8))$ e $D(4, f(8))$. Tem-se:

$$f(4) = \ln 5 + \ln 6 = \ln(5 \times 6) = \ln 30 \;\text{ e }\; f(8) = \ln 9 + \ln 10 = \ln(9 \times 10) = \ln 90$$

Assim:

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{AD} = (8-4) \times (f(8) - f(4)) = 4 \times (\ln 90 - \ln 30) = 4 \ln\left(\frac{90}{30}\right) =$$

$$= 4 \ln 3 = \ln(3^4) = \ln 81$$

Resposta: C

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^5\mathrm{e}^x) \overset{(\infty\times 0)}{\underset{\text{i)}}{=}} \lim\limits_{y\to+\infty}(2(-y)^5\mathrm{e}^{-y}) = -2\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^5}{\mathrm{e}^y} = -2\times 0 = 0$

Se $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p} = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0$, com $a > 1$ e $p \in \mathbb{R}$

i) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $-x \to +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \to +\infty$.

Resposta: B

6. Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$
$g(x)$	$\cap$	Ponto anguloso	$\cup$	Ponto anguloso	$\cap$

O gráfico da opção $\boxed{\text{B}}$ não é o correto porque tem ponto de inflexão em $x = -2$ e em $x = 0$ e portanto nesses pontos a segunda derivada é nula. Portanto o gráfico correto é o da opção $\boxed{\text{D}}$.

Resposta: D

7. Tem-se $\frac{z^2}{w} = \frac{(\mathrm{cis}\theta)^2}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{7\pi}{5}\right)} = \frac{\mathrm{cis}(2\theta)}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{7\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{cis}\left(2\theta + \frac{7\pi}{5}\right)$. O número complexo $\frac{z^2}{w}$ é um número real negativo seu argumento for da forma $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$2\theta + \frac{7\pi}{5} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo $k = 1$, vem $\theta = \frac{4\pi}{5}$.

Resposta: C

8. Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$(z+\bar{z})^2 - (z-\bar{z})^2 = 16 \Leftrightarrow (x+yi+x-yi)^2 - \left(x+yi-(x-yi)\right)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - (x+yi-x+yi)^2 = 16 \Leftrightarrow 4x^2 - (2yi)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4yi^2 = 16 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Portanto a condição $(z+\bar{z})^2 - (z-\bar{z})^2 = 16$ define uma circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial.

Resposta: B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Tem-se:

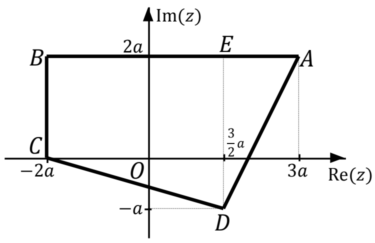
$$z_3 = \frac{2+(z_1)^5}{i^{79}} - i^{101} = \frac{2+\left(\operatorname{cis}\frac{4\pi}{5}\right)^5}{i^{4\times 19+3}} - i^{4\times 25+1} = \frac{2+\operatorname{cis}\left(5\times\frac{4\pi}{5}\right)}{i^3} - i = \frac{2+\overbrace{\operatorname{cis}(4\pi)}^{1}}{-i} - i = \frac{3}{-i}\times\frac{i}{i} - i = \frac{3i}{-i^2} - i =$$

$$= 3i - i = 2i = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

z_3 é raiz cúbica de z_2 se $(z_3)^3 = z_2$. Assim, $(z_3)^3 = \left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)^3 = 2^3\operatorname{cis}\left(3\times\frac{\pi}{2}\right) = 8\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = z_2$ e portanto z_3 é raiz cúbica de z_2. As restantes raízes cúbicas de z_2 são $2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}$ e $2\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}$.

2. Os pontos A e B são as imagens geométricas, respetivamente, dos números complexos $z_1 = 3a + 2ai$ e $z_2 = -2a + 2ai$, com $a \in \mathrm{IR}^+$, portanto $A(3a, 2a)$ e $B(-2a, 2a)$. Como o ponto C pertence ao eixo real e tem a mesma abcissa que o ponto B, então $C(-2a, 0)$. O ponto D é a imagem geométrica do número complexo $\frac{1}{2}\overline{z_1} = \frac{1}{2}(3a - 2ai) = \frac{3}{2}a - ai$, logo $D\left(\frac{3}{2}a, -a\right)$. Na figura pode-se ver o quadrilátero $[ABCD]$ representado no plano complexo, para um certo número real $a > 0$.

Seja E o ponto de interseção do segmento de reta $[AB]$ com a reta de equação $x = \frac{3}{2}a$, assim $\overline{EB} = 2a + \frac{3}{2}a = \frac{7}{2}a$ e $\overline{AE} = \frac{3}{2}a$, portanto:



$$A_{[ABCD]} = 22 \Leftrightarrow A_{[BCDE]} + A_{[AED]} = 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BC}+\overline{ED}}{2}\times\overline{EB} + \frac{\overline{AE}\times\overline{ED}}{2} = 22$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+3a}{2}\times\frac{7}{2}a + \frac{\frac{3}{2}a\times 3a}{2} = 22 \Leftrightarrow \frac{35}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 = 22$$

$$\Leftrightarrow 44a^2 = 88 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2} \ \vee \ a = \sqrt{2}$$

Como $a > 0$, vem $a = \sqrt{2}$ e portanto $z_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \underset{\text{i)}}{=} 4\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.

i) Cálculo auxiliar: Para escrever $z_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $|z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$. Sendo θ um argumento de z_2, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1$ e $\theta \in 2.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Assim, $z_2 = 4\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.

3.

3.1.

▪ $P\left(A\middle|(\bar{A}\cup B)\right)=\frac{P(A\cap(\bar{A}\cup B))}{P(\bar{A}\cup B)}=\frac{P((A\cap\bar{A})\cup(A\cap B))}{P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)}=$

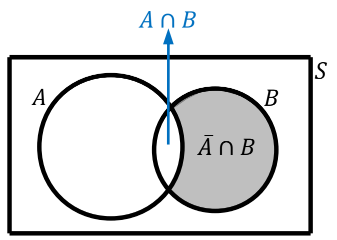
$$\underset{\text{i)}}{=}\frac{P(\emptyset\cup(A\cap B))}{P(\bar{A})+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))}=$$

$$=\frac{P(A\cap B)}{P(\bar{A})+P(B)-P(B)+P(A\cap B)}=$$

$$\underset{\text{ii)}}{=}\frac{P(A)\times P(B)}{1-P(A)+P(A)\times P(B)}=$$

$$=\frac{a\times b}{1-a+a\times b}=\frac{a\times b}{1+a\times(b-1)}$$

i)



$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

ii) A e B são independentes $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

▪ Tem-se que $2P(A)-P(B)=0\Leftrightarrow P(B)=2P(A)\Leftrightarrow b=2a$ e que $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=a\times b$. Assim:

$$P(A\cup B)=\frac{7}{9}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{9}\Leftrightarrow a+b-a\times b=\frac{7}{9}\underset{b=2a}{\Leftrightarrow}a+2a-a\times 2a=\frac{7}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^2+3a-\frac{7}{9}=0\Leftrightarrow\ a=\frac{1}{3}\ \vee\ a=\frac{7}{6}$$

Como $0<a<1$, vem $a=\frac{1}{3}$ e $b=2a=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Portanto, $P\left(A\middle|(\bar{A}\cup B)\right)=\frac{a\times b}{1+a\times(b-1)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}-1\right)}=\frac{\frac{2}{9}}{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

3.2. Considere-se os acontecimentos A:«o trabalhador tem menos de 25 anos» e B: «o trabalhador é solteiro». Os acontecimentos A e B são independentes, portanto pode-se aplicar a igualdade enunciada em **3.1.**. Do enunciado vem $a=P(A)=0{,}2=\frac{1}{5}$ e $P(B|A)=\frac{5}{7}$. Como A e B são independentes, tem-se $b=P(B)=P(B|A)=\frac{5}{7}$.

Pretende-se determinar $P\left(A\middle|(\bar{A}\cup B)\right)$. Assim:

$$P\left(A\middle|(\bar{A}\cup B)\right)=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{5}{7}}{1+\frac{1}{5}\times\left(\frac{5}{7}-1\right)}=\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{5}\times\left(-\frac{2}{7}\right)}=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{35}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{33}{35}}=\frac{35}{33\times7}=\frac{5}{33}$$

Portanto a probabilidade pedida é $\frac{5}{33}$.

4. Para solucionar este problema, comecemos por separá-lo em dois casos: os números naturais entre 10000 e 29999 que se iniciam por 1 e os que se iniciam por 2:

1.º Caso (os que se iniciam por 1): pretende-se que a soma dos cinco algarismos seja um número ímpar. Como o primeiro algarismo é ímpar, a soma dos restantes quatro terá de ser par. Portanto temos de considerar três casos: os restantes quatro algarismos são ímpares, ou os restantes quatro algarismos são pares, ou entre os restantes quatro algarismos, dois são pares e os outros dois ímpares.

Os restantes quatro algarismos são ímpares:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{ímpar} & \text{ímpar} & \text{ímpar} & \text{ímpar} \\ \hline 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

O total de números nestas condições é $4!$.

Os restantes quatro algarismos são pares:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{par} & \text{par} & \text{par} & \text{par} \\ \hline 1 & 4 & 3 & 5 & 4 \end{array}$$

O total de números nestas condições é:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = {}^5A_4$$

Entre os restantes quatro algarismos, dois são pares e dois são ímpares, por exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{ímpar} & \text{ímpar} & \text{par} & \text{par} \\ \hline 1 & 4 & 3 & 5 & 4 \end{array}$$

Começa-se por escolher as posições que os números ímpares (ou os pares) podem ocupar, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_2$ (entre as quatro posições escolhem-se duas, as restantes duas ficam para os pares). O total de números nestas condições é:

$${}^4C_2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 4 = {}^4C_2 \times {}^4A_2 \times {}^5A_2$$

2.º Caso (os que se iniciam por 2): pretende-se que a soma dos cinco algarismos seja um número ímpar. Como o primeiro é par, a soma dos restantes quatro terá de ser ímpar. Portanto temos de considerar dois casos: entre os restantes quatro algarismos, três são ímpares e um é par, ou entre os restantes quatro algarismos, três são pares e um é ímpar.

Entre os restantes quatro algarismos, três são ímpares e um é par, por exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \text{ímpar} & \text{ímpar} & \text{ímpar} & \text{par} \\ \hline 1 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}$$

Começa-se por escolher as posições que os números ímpares (ou o par) podem ocupar, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$ (ou ${}^4C_1$) (entre as quatro posições escolhem-se três, a restante fica para o par). O total de números nestas condições é:

$${}^4C_3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 = {}^4C_3 \times {}^5A_3 \times 4$$

Entre os restantes quatro algarismos, três são pares e um é ímpar, por exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \text{par} & \text{par} & \text{par} & \text{ímpar} \\ \hline 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

Começa-se por escolher as posições que os números pares (ou o ímpar) podem ocupar, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$ (ou ${}^4C_1$) (entre as quatro posições escolhem-se três, a restante fica para o ímpar). O total de números nestas condições é:

$${}^4C_3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 5 = {}^4C_3 \times {}^4A_3 \times 5$$

Logo o total de números nas condições do enunciado é:

$$4! + {}^5A_4 + {}^4C_2 \times {}^4A_2 \times {}^5A_2 + {}^4C_3 \times {}^5A_3 \times 4 + {}^4C_3 \times {}^4A_3 \times 5 = 3024$$

5. Vamos começar por calcular o domínio de $\log_2(x+3) \geq \log_2(6-2x) - \log_2 x$.

$$D = \{x \in \mathrm{IR}: x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\} = \{x \in \mathrm{IR}: x>-3 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\} =]0,3[$$

Neste domínio tem-se:

$$\log_2(x+3) \geq \log_2(6-2x) - \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2 x \geq \log_2(6-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x(x+3)) \geq \log_2(6-2x)$$

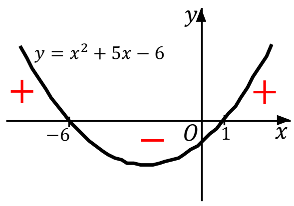
$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+3x) \geq \log_2(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x \geq 6-2x \Leftrightarrow x^2+5x-6 \geq 0$$

Portanto, C.S.= $[1,3[$.

Cálculo auxiliar:

$x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x=-6 \ \vee \ x=1$



$x^2+5x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-6] \cup [1,+\infty[$

6.

6.1. Como $t=0$ corresponde às 9h da manhã, então $t=15$ corresponde às 9h15min e $t=30$ corresponde às 9h30min. A função A é contínua em $[0,38]$ pois é composição e diferença entre funções contínuas em $[0,38]$. Logo, A é contínua em $[15,30] \subset [0,38]$. Tem-se:

- $A(15) = 5 - 2 \times 15 + 15\ln(3 \times 15 + 5) = -25 + 15\ln(50) \approx 33{,}68$

- $A(30) = 5 - 2 \times 30 + 15\ln(3 \times 30 + 5) = -55 + 15\ln(95) \approx 13{,}31$

Assim, como $A(30) < 25 < A(15)$, pelo teorema de Bolzano $\exists\, c \in]15,30[: A(c) = 25$, ou seja, existe um instante entre as 9h15min e as 9h30min em que o parapente do Manuel esteve a 25 metros de altura.

6.2. Tem-se:

▪ $A'(t) = -2 + 15 \times \frac{(3t+15)'}{3t+5} = -2 + 15 \times \frac{3}{3t+5} = \frac{-6t-10+45}{3t+5} = \frac{-6t+35}{3t+5}$

▪ $A'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 35 = 0 \ \wedge \ 3t + 5 \neq 0 \Leftrightarrow t = \frac{35}{6} \ \wedge \ t \neq -\frac{5}{3}$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função A', vem:

t	0		$\frac{35}{6}$		38
$-6t+35$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$3t+5$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$A'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$A(t)$	min.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	min.

A função A tem máximo em $t = \frac{35}{6}$. Conservando três casas decimais, $\frac{35}{6} \approx 5{,}833$, que corresponde a 5 minutos e a $0{,}833 \times 60 \approx 50$ minutos, isto é, o parapente do Manuel atingiu a altura máxima 5 minutos e 50 segundos após o salto se ter iniciado. O valor dessa altura é dada por $A\left(\frac{35}{6}\right) = 5 - 2 \times \frac{35}{6} + 15 \ln\left(3 \times \frac{35}{6} + 5\right) = -\frac{20}{3} + 15 \ln\left(\frac{45}{2}\right) \approx 40$ metros.

7.

7.1.

▪ Assíntotas verticais

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^3+x-1}{x^2-x} = \frac{3\times 0^3+0-1}{0^2-0} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x + \mathrm{e}^{3-x}) = 2 \times 0 + \mathrm{e}^{3-0} = \mathrm{e}^3$.

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função g. Como a função g é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas não verticais

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{3x^3+x-1}{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3+x-1}{x^3-x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3+x-1}{x^2-x}-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+x-1-3x^3+3x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x-1}{x^2-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

A reta de equação $y=3x+3$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to-\infty$.

Quando $x\to+\infty$:

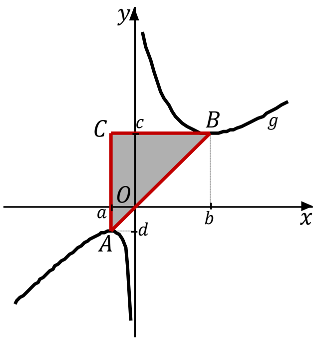
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\mathrm{e}^{3-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}+\frac{\mathrm{e}^{3-x}}{x}\right)=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{3-x}}{x}=2+\frac{\mathrm{e}^{-\infty}}{+\infty}=2+\frac{0}{+\infty}=2+0=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(2x+\mathrm{e}^{3-x}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{3-x}=\mathrm{e}^{-\infty}=0$$

A reta de equação $y=2x$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to+\infty$.

7.2. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1=g(x)$ na janela de visualização $[-5,5]\times[-5,10]$.

As coordenadas do ponto A são (a,d), do ponto B são (b,c) e do ponto C são (a,c), com $a\approx-0{,}71$, $b\approx2{,}31$, $c\approx6{,}61$ e $d\approx-2{,}29$. Assim:



$$\overline{AB}=\sqrt{(a-b)^2+(d-c)^2}\approx9{,}398$$

$$\overline{BC}=b-a=3{,}02$$

$$\overline{AC}=c-d=8{,}9$$

Portanto, $P_{[ABC]}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\approx21$.

8.

8.1. Tem-se:

- $1+\mathrm{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow\cos^2\theta=\frac{9}{10}$

- $\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1\Leftrightarrow\mathrm{sen}^2\theta+\frac{9}{10}=1\Leftrightarrow\mathrm{sen}^2\theta=1-\frac{9}{10}\Leftrightarrow\mathrm{sen}^2\theta=\frac{1}{10}$

Portanto, para $a=-1$ e $b=2$, vem:

$$g(\theta)=-1+2\cos^2\theta+c\,\text{sen}^2\theta=-1+2\times\frac{9}{10}+c\times\frac{1}{10}=\frac{-10+18+c}{10}=\frac{c+8}{10}$$

8.2.

- Tem-se:

$$g(x)=a+b\cos^2x+c\,\text{sen}^2x=a+b\cos^2x+c(1-\cos^2x)=a+b\cos^2x+c-c\times\cos^2x=$$

$$=a+c+(b-c)\cos^2x$$

Assim:

$$\forall\, x\in\text{IR},\ 0\leq\cos^2x\leq 1\ \underset{b-c>0}{\Leftrightarrow}\ 0\leq(b-c)\cos^2x\leq b-c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+c\leq a+c+(b-c)\cos^2x\leq a+c+b-c$$

$$\Leftrightarrow a+c\leq a+c+(b-c)\cos^2x\leq a+b$$

Como o contradomínio da função g é $[3,5]$, vem $a+c=3$ e $a+b=5$ (1)

- Por outro lado, a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ tem declive $-a$, logo $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-a$.

Assim:

$$g'(x)=(a+c+(b-c)\cos^2x)'=2(b-c)\cos x\times(\cos x)'=2(b-c)\cos x\times(-\text{sen}x)=$$

$$=-(b-c)\times 2\cos x\,\text{sen}x=-(b-c)\text{sen}(2x)=(c-b)\text{sen}(2x)$$

Portanto:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-a\Leftrightarrow(c-b)\text{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=-a\Leftrightarrow(c-b)\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}=-a\Leftrightarrow c-b=-a\ (2)$$

Com as equações de (1) e de (2) podemos formar um sistema que permitirá determinar os valores de a, b e c:

$$\begin{cases} a+c=3 \\ a+b=5 \\ c-b=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3-a \\ b=5-a \\ 3-a-(5-a)=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ 3-a-5+a=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ -2=-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=3-2 \\ b=5-2 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases}$$