

## PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME – TIPO 4

### GRUPO I – ÍTENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O número de casos possíveis é  ${}^{10}C_4$ . Para determinar o número de casos possíveis tem que se considerar três casos:

- a Maria vai ao teatro e o Pedro não. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é  ${}^8C_3$  (como a Maria vai e o Pedro não, temos de escolher três pessoas entre as restantes oito);
- o Pedro vai ao teatro e a Maria não. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é  ${}^8C_3$  (como o Pedro vai e a Maria não, temos de escolher três pessoas entre as restantes oito);
- nenhum dos dois irmãos vai o teatro. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é  ${}^8C_4$  (como a Maria e o Pedro não vão, temos de escolher quatro pessoas entre as restantes oito).

No triângulo de Pascal a soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento que se encontra entre os dois na linha seguinte.

Assim, o número de casos favoráveis é  ${}^8C_3 + \overbrace{{}^8C_3 + {}^8C_4}^{{}^9C_4} = {}^8C_3 + {}^9C_4$ . Portanto, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é  $\frac{{}^8C_3 + {}^9C_4}{{}^{10}C_4}$ .

**Resposta: B**

2.  $P(\bar{X}|Y)$  designa a probabilidade das duas bolas retiradas serem de cores diferentes sabendo que no lançamento do dado saiu a face numerada com o número 1. Como o número 1 não é primo, passam-se da caixa B para a caixa A três bolas pretas, ficando assim a caixa A com 13 bolas, seis brancas e sete pretas. Logo, o número de casos possíveis é  ${}^{13}C_2$  e o número de casos favoráveis é  ${}^6C_1 \times {}^7C_1 = 42$  (das seis bolas brancas retira-se uma e das sete pretas outra). Assim, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é  $P(\bar{X}|Y) = \frac{42}{{}^{13}C_2} = \frac{7}{13}$ .

**Resposta: C**

3. A variável aleatória  $X$  toma os valores 3 (o Sérgio escolhe dois livros de Carl Sagan), 4 (o Sérgio escolhe um livro de Carl Sagan e outro de outro autor) ou 5 (o Sérgio escolhe dois livros que não são de Carl Sagan), ou seja,  $X = \{3, 4, 5\}$ . Assim:

$$P(X = 3) = \frac{{}^5C_2}{{}^{12}C_2}, \quad P(X = 4) = \frac{{}^5C_1 \times {}^7C_1}{{}^{12}C_2} = \frac{5 \times 7}{{}^{12}C_2} \quad \text{e} \quad P(X = 5) = \frac{{}^7C_2}{{}^{12}C_2}$$

**Resposta: D**

4. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim \left( 2n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{2}{n} \right) \right) &= \lim \left( 2n \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \right) = \lim \left( 4n \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2}{n} \right)}{\frac{2}{n}} \right) = \lim(4n) \times \lim \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2}{n} \right)}{\frac{2}{n}} = \\ &= (+\infty) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = +\infty \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** Seja  $x = \frac{2}{n}$ , se  $n \rightarrow +\infty$  então  $x \rightarrow 0$ .

Assim, pela definição de limite segundo Heine,  $\lim_{x \rightarrow -2} g \left( 2n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{2}{n} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ .

**Resposta: B**

5. Como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , então também é contínua em  $x = -2$  e em  $x = 0$ .

A função  $f$  é contínua em  $x = -2$  se e só se  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$ . Assim:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{ke^{x+2}-k}{x+2} \stackrel{i)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{ke^y-k}{y} = k \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y-1}{y} = k \times 1 = k$$

i) **Mudança de variável:** Se  $x \rightarrow -2^-$  então  $x+2 \rightarrow 0^-$ . Seja  $y = x+2$ ,  $y \rightarrow 0^-$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = k^2$$

Logo,  $k^2 = k \Leftrightarrow k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 1$  (1)

A função  $f$  é contínua em  $x = 0$  se e só se  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ . Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \ln(kx+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2x}{x} - \frac{\ln(kx+1)}{x} \right) = 2 - k \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(kx+1)}{kx} = 2 - k \times 1 = 2 - k$$

↓  
Se  $x \rightarrow 0$  então  $kx \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = k^2$$

Logo,  $k^2 = 2 - k \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 1$  (2)

Portanto, de (1) e de (2), conclui-se que  $k = 1$ .

**Resposta: C**

6. A resposta correta é a **C**. De facto a função  $g(x) = 2^x + \log_4(x + 2)$  é contínua em  $]-2, +\infty[$  e portanto também é contínua em  $[-1, 2] \subset ]-2, +\infty[$ . Tem-se:

$$g(-1) = 2^{-1} + \log_4(-1 + 2) = \frac{1}{2} + \log_4(1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(2) = 2^2 + \log_4(2 + 2) = 4 + \log_4(4) = 5$$

Assim, como  $g(-1) < 2 < g(2)$ , pelo teorema de Bolzano  $\exists c \in ]-1, 2[ : g(c) = 2$ .

**Nota:** A função da opção A também verifica a condição  $g(-1) < 2 < g(2)$ , contudo esta função não é contínua em  $x = 0$  e portanto não é contínua em  $[-1, 2]$ .

**Resposta: C**

7. Tem-se  $z^3 - z^2 = 5z - 21 \Leftrightarrow z^3 - z^2 - 5z + 21 = 0$ . Como  $-3$  é solução da equação, recorrendo à regra de Ruffini, vem:

$$z^3 - z^2 - 5z + 21 = 0 \Leftrightarrow (z + 3) \times (z^2 - 4z + 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + 3 = 0 \vee z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm \sqrt{12} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = 2 - \sqrt{3}i \vee z = 2 + \sqrt{3}i$$

**Cálculo Auxiliar: (Regra de Ruffini)**

	1	-1	-5	21
-3		-3	12	-21
	1	-4	7	0

$$z^3 - z^2 - 5z + 21 = (z + 3)(z^2 - 4z + 7)$$

**Resposta: A**

8. Tem-se  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\alpha$  e  $\cos(-\alpha) = \text{cos}\alpha$ . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{2z}{i} &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2i\cos(-\alpha)}{i} = \frac{2\text{sen}\alpha - 2i\text{cos}\alpha}{i} = \frac{2\text{sen}\alpha - 2i\text{cos}\alpha}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-2i\text{sen}\alpha + 2i^2\text{cos}\alpha}{-i^2} = -2\text{cos}\alpha - 2i\text{sen}\alpha = \\ &= -2(\text{cos}\alpha + i\text{sen}\alpha) = -2\text{cis}\alpha = 2\text{cis}(\alpha + \pi) \end{aligned}$$

**Resposta: A**

**GRUPO II – ÍTENS DE RESPOSTA ABERTA**

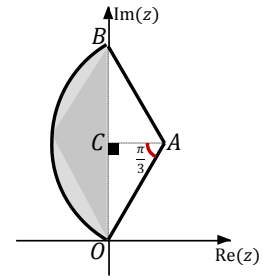
1.

1.1. Como  $\overline{AB} = \overline{OA}$ , então o triângulo  $[OAB]$  é isósceles. Seja  $C$  o ponto médio do segmento de reta  $[OB]$ , como representado na figura:

Tem-se que  $\widehat{OAC} = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$  e que  $\overline{OC} = 1$ , assim:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto  $A$  são  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$  e portanto  $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$ . Como as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0, 2)$  vem  $z_2 = 2i$ . Assim:



$$\begin{aligned} 3(z_1)^2 + 3\sqrt{3}z_2 &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)^2 + 3\sqrt{3} \times 2i = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i + i^2\right) + 6\sqrt{3}i = \\ &= 3\left(-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) + 6\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 6\sqrt{3}i = -2 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Portanto,  $|3(z_1)^2 + 3\sqrt{3}z_2| = |-2 + 8\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 64 \times 3} = \sqrt{196} = 14$ .

1.2. A região colorida da figura é a parte do círculo centrado em  $A$ , imagem geométrica de  $z_1$  e raio  $\overline{OA}$ , que está contida no segundo quadrante, eixo imaginário não incluído. Tem-se:

$$\overline{OA} = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Uma condição que define a região colorida da figura é:

$$|z - z_1| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \operatorname{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \left|z - \frac{\sqrt{3}}{3} - i\right| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \operatorname{Re}(z) < 0$$

- $A_{\text{colorida}} = A_{\text{setor}OAB} - A_{[OAB]} = \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{\overline{OB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2\pi}{6} \times \frac{12}{9} - \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{4\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{9}$
- $P_{\text{colorido}} = \text{comprimento do arco } OB + \overline{OB} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} + 2 = \frac{4\pi\sqrt{3} + 18}{9}$

2.

2.1. Tem-se,  $\frac{P(B|A) \times P(A)}{P(A|B)} = \frac{\frac{P(B \cap A) \times P(A)}{P(A)}}{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \frac{P(B \cap A) \times P(B)}{P(A \cap B)} = P(B)$  (1)

Por outro lado:

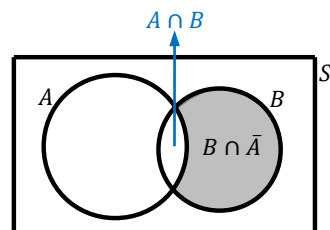
$$P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) =$$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \times P(A) + \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \times P(\bar{A})$$

$$= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$= P(B \cap A) + P(B) - P(B \cap A) = P(B)$$
 (2)

i)



$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

Portanto de (1) e de (2) conclui-se que  $P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(A|B)}$ .

2.2.

2.2.1. Considere-se os acontecimentos  $A$ : «a bola retirada da caixa é encarnada» e  $B$ : «a bola retirada da caixa está numerada com um número par». Do enunciado vem  $P(A) = 0,3 = \frac{3}{10}$ ,  $P(B|A) = \frac{5}{12}$  e  $P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4}$ . Pretende-se determinar  $P(A|B)$ , assim:

$$P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(A|B)} \Leftrightarrow \frac{5}{12} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{\frac{5}{12} \times 0,3}{P(A|B)} \Leftrightarrow \frac{13}{20} = \frac{\frac{1}{8}}{P(A|B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{20}} = \frac{20}{104} = \frac{5}{26}$$

Portanto a probabilidade pedida é  $\frac{5}{26}$ .

**Outra resolução:** Pode-se responder a esta questão construindo uma tabela. Considerando os mesmos acontecimentos  $A$  e  $B$  tem-se:

	$A$	$\bar{A}$	p.m.
$B$	$\frac{1}{8}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{20}$
$\bar{B}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{20}$
p.m.	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

**Justificações:**

- $P(B|A) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{5}{12} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{8}$
- $P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$
- $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10} - \frac{1}{8} = \frac{7}{40}$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{10} - \frac{21}{40} = \frac{7}{40}$

$$\text{Logo } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{20}} = \frac{5}{26}.$$

**2.2.2.** Pela tabela construída na alínea anterior tem-se que  $25 \left(\frac{1}{8} \times 200\right)$  bolas são encarnadas e estão numeradas com um número par,  $105 \left(\frac{21}{40} \times 200\right)$  bolas são pretas e estão numeradas com um número par,  $35 \left(\frac{7}{40} \times 200\right)$  bolas são encarnadas e estão numeradas com um número ímpar e  $35$  bolas são pretas e estão numeradas com um número ímpar. Portanto, pretende-se extrair duas bolas encarnadas numeradas com um número par entre as  $25$  (o número de maneiras de o fazer é  ${}^{25}C_2$ ), duas bolas pretas numeradas com um número par entre as  $105$  (o número de maneiras de o fazer é  ${}^{105}C_2$ ), três bolas encarnadas numeradas com um número ímpar entre as  $35$  (o número de maneiras de o fazer é  ${}^{35}C_3$ ) e três bolas pretas numeradas com um número ímpar entre as  $35$  (o número de maneiras de o fazer é  ${}^{35}C_3$ ). Logo, o número de maneiras de escolher dez bolas entre as  $200$  nas condições pedidas é  ${}^{25}C_2 \times {}^{105}C_2 \times {}^{35}C_3 \times {}^{35}C_3 = {}^{25}C_2 \times {}^{105}C_2 \times ({}^{35}C_3)^2$ .

**3.** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 5$  então a reta de equação  $y = -2x + 5$  é assíntota oblíqua do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ . Portanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 5) = -\infty$ . Assim, se  $y = mx + b$  for a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ , vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{f(x)-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{xf(x)-x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 \left(\frac{xf(x)}{x^2} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{f(x)}{x} - 1} = \frac{3}{-2-1} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{f(x)-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + xf(x) - x^2}{f(x)-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + xf(x)}{f(x)-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x)+2x)}{x \left( \frac{f(x)}{x} - 1 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+2x}{\frac{f(x)}{x} - 1} = \frac{5}{-2-1} = -\frac{5}{3}$$

Logo o gráfico da função  $g$  tem uma assíntota oblíqua, quando  $x \rightarrow +\infty$ , de equação  $y = -x - \frac{5}{3}$ .

4.

4.1.

$$\begin{aligned}
 \bullet g'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 7)e^{3-x} - 2}{x - 3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{((y+3)^2 - 7)e^{-y} - 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2 + 6y + 9 - 7)e^{-y} - 2}{y} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2 + 6y + 2)e^{-y} - 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2 + 6y)e^{-y} + 2e^{-y} - 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2 + 6y)e^{-y}}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2e^{-y} - 2}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(y+6)e^{-y}}{y} + 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-y} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} ((y+6)e^{-y}) - 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-y} - 1}{-y} \\
 &= (0 + 6) \times e^0 - 2 \times 1 = 6 - 2 = 4
 \end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** Se  $x \rightarrow 3$  então  $x - 3 \rightarrow 0$ . Seja  $y = x - 3 \Leftrightarrow x = y + 3, y \rightarrow 0$ .

• Seja  $t$  a reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa 3. Assim,  $m_t = -\frac{1}{g'(3)} = -\frac{1}{4}$  e a equação reduzida da reta  $t$  é do tipo  $y = -\frac{1}{4}x + b$ . O ponto de coordenadas  $(3, g(3)) = (3, 2)$  pertence à reta  $t$ , logo  $2 = -\frac{1}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{4}$ . A equação reduzida da reta  $t$  é  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$ .

**Outra resolução:** A equação reduzida da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa 3 é dada por:

$$y - g(3) = -\frac{1}{g'(3)}(x - 3) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

4.2. Tem-se:

$$\bullet g'(x) = 2xe^{3-x} - (x^2 - 7)e^{3-x} = e^{3-x} \times (-x^2 + 2x + 7)$$

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= -e^{3-x} \times (-x^2 + 2x + 7) + e^{3-x} \times (-2x + 2) = e^{3-x} \times (x^2 - 2x - 7 - 2x + 2) = \\
 &= e^{3-x} \times (x^2 - 4x - 5)
 \end{aligned}$$

$$\bullet g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3-x} \times (x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{3-x} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função  $g''$ , vem:

$x$	$-\infty$	$-1$		$5$	$+\infty$
i) $g''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

i) Observa que o sinal de  $g''$  depende apenas do sinal de  $x^2 - 4x - 5$  porque  $e^{3-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

O gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo em  $[-1, 5]$ , tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, -1]$  e em  $[5, +\infty[$  e tem ponto de inflexão em  $x = -1$  e em  $x = 5$ .

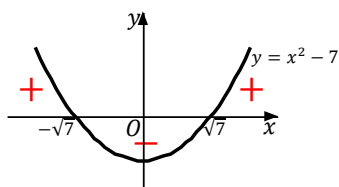
4.3. Vamos começar por calcular o domínio de  $\ln(g(x)) + x \leq 3 + \ln(2x + 8)$ .

$$D = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0 \wedge 2x + 8 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: (x < -\sqrt{7} \vee x > \sqrt{7}) \wedge x > -4\} = ]-4, -\sqrt{7}[ \cup ]\sqrt{7}, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:  $g(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 7)e^{3-x} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 7 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{7} \vee x > \sqrt{7}$

$$e^{3-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

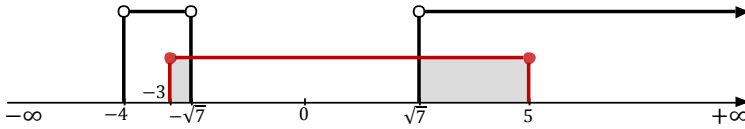
$$x^2 - 7 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\sqrt{7}[ \cup ]\sqrt{7}, +\infty[$$



Neste domínio tem-se:

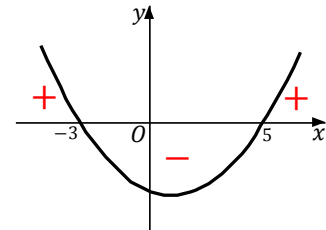
$$\begin{aligned} \ln(g(x)) + x \leq 3 + \ln(2x + 8) &\Leftrightarrow \ln((x^2 - 7)e^{3-x}) + x \leq 3 + \ln(2x + 8) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2 - 7) + \ln(e^{3-x}) + x \leq 3 + \ln(2x + 8) \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2 - 7) + 3 - x + x \leq 3 + \ln(2x + 8) \\ &\Leftrightarrow \ln(x^2 - 7) \leq \ln(2x + 8) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 7 \leq 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 \leq 0 \end{aligned}$$





Portanto, C.S. =  $[-3, -\sqrt{7}[ \cup ]\sqrt{7}, 5]$ .

**Cálculo auxiliar:**  
 $x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$



$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 5]$

5.

5.1.

▪ Pelo teorema de Pitágoras tem-se  $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = (\sqrt{8})^2 \stackrel{\overline{AD}=\overline{CD}}{\Leftrightarrow} 2\overline{AD}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 4$ , como  $\overline{AD} > 0$ , vem  $\overline{AD} = 2$ .

▪  $A_{[ACP]} = A_{[ACD]} - A_{[APD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{AD} \times \overline{DP}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{2 \times \overline{DP}}{2} = 2 - \overline{DP}$ . Como  $D\hat{A}P = \frac{\pi}{4} - x$ , vem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\overline{DP}}{2} \Leftrightarrow \overline{DP} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{[ACP]} &= 2 - \overline{DP} = 2 - 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 - 2 \times \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{tg}x} = 2 - 2 \times \frac{1 - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = \\ &= \frac{2 + 2\operatorname{tg}x - 2 + 2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = \frac{4\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = f(x) \end{aligned}$$

5.2.

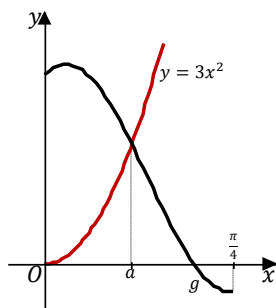
▪ Para  $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$  tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{4\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} &\Leftrightarrow \frac{4\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = \frac{4\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})4\operatorname{tg}x = 4\sqrt{3}(1 + \operatorname{tg}x) \Leftrightarrow 12\operatorname{tg}x + 4\sqrt{3}\operatorname{tg}x = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\operatorname{tg}x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 12\operatorname{tg}x = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \frac{4\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \text{ pois } x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

- Para  $x = \frac{\pi}{6}$  tem-se:

$$\sin(D\hat{A}P) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

**5.3.** Pretende-se determinar a solução da equação  $g(x) = 3x^2$  pertencente ao intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se  $y_1 = g(x)$  e  $y_2 = 3x^2$  na janela de visualização  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [-1, 2]$ .



Assim,  $g(x) = 3x^2 \Leftrightarrow x = a$ , com  $a \approx 0,46$ . Como  $A_{[APD]} = A_{[ACD]} - A_{[ACP]} = 2 - f(x)$ , para  $x = a$ , vem:

$$A_{[APD]} = 2 - f(a) = 2 - \frac{4 \operatorname{tga}}{1 + \operatorname{tga}} \approx 0,7$$