PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME – TIPO 5

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Agrupando num bloco a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Eduardo, o bloco e os restantes sete amigos permutam entre si de $8!$ maneiras. Como os cinco amigos de bloco têm de ficar sentados alternadamente por sexo, então a segunda e a quarta posições serão ocupadas por rapazes (portanto, podem-se sentar de $2!$ maneiras) e as primeira, terceira e quinta posições do bloco por raparigas (portanto, podem-se sentar de $3!$ maneiras). Logo, o número maneiras dos cinco amigos se sentarem é $2! \times 3!$. Portanto o número pedido é $2! \times 3! \times 8!$ (observa a figura seguinte).

$$\underbrace{\boxed{3}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2! \times 3! \times 8!}$$

Resposta: B

2. Como A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, assim:

$$1 - P\left(\left(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}\right) \middle| B\right) = 1 - P\big((A \cap B)\big|B\big) = 1 - \frac{P((A\cap B)\cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P\big(A\cap(B\cap B)\big)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\bar{A})$$

Resposta: C

3. Tem-se que $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ e que $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\forall x \in \mathrm{IR}^+, \forall a, b \in \mathrm{IR}^+ \backslash \{1\}$.

- $f(2) = \frac{3^2}{9\log_4 2} = \frac{1}{\log_4 2} = \log_2 4 = 2$. Logo, o ponto de coordenadas $(2, 2)$ pertence ao gráfico de f.

- $f(3) = \frac{3^3}{9\log_4 3} = 3 \times \frac{1}{\log_4 3} = 3\log_3 4 = \log_3(4^3) = \log_3 64$. Logo, o ponto de coordenadas $(3, \log_3 64)$ pertence ao gráfico de f.

- $f(4) = \frac{3^4}{9\log_4 4} = \frac{81}{9\times 1} = 9$. Logo, o ponto de coordenadas $(4, 9)$ pertence ao gráfico de f.

- $f(8) = \frac{3^8}{9\log_4 8} = \frac{729}{\log_4 8} = \frac{729}{\frac{3}{2}} = \frac{729\times 2}{3} = 486$. Logo, o ponto de coordenadas $(8, 486)$ pertence ao gráfico de f e portanto o ponto de coordenadas $(8, 243)$ não pertence ao gráfico de f.

Cálculo auxiliar: $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

Resposta: D

4. Os pontos $A(0,-2)$ e $B(3,0)$ pertencem à reta r. Assim, $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-2)}{3-0} = \frac{2}{3}$ e portanto a equação reduzida da reta r é $y = \frac{2}{3}x - 2$ (assíntota do gráfico de g, quando $x \to +\infty$). Como a função g é par, então a reta de equação $y = -\frac{2}{3}x - 2$ é assíntota do gráfico de g, quando $x \to -\infty$. Como $\lim_{x\to-\infty} g'(x)$ é finito, então $\lim_{x\to-\infty} g'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = -\frac{2}{3}$. Assim:

- $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$

- $b = \lim_{x\to-\infty} \left(g(x) + \frac{2}{3}x\right) = -2$

- $c = \lim_{x\to-\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{g(x)} \times g'(x)\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x\to-\infty} g'(x) = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 1$

Portanto, $9a + b - c = 9 \times \frac{2}{3} - 2 - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$.

Resposta: D

5. Tem-se:

- $\lim_{x\to-1^+} g(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\ln(f(x))}{2x} = \frac{\ln(0^+)}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$. Portanto exclui-se a opção $\boxed{\text{C}}$.

- $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(f(x))}{2x} = \frac{\overbrace{\ln(f(0))}^{<0}}{0^+} = -\infty$. Portanto exclui-se a opção $\boxed{\text{D}}$.

Nota: Como $0 < f(0) < 1$, vem que $\ln(f(0)) < 0$

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{2x} = \frac{\ln(1)}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$. Portanto exclui-se a opção $\boxed{\text{B}}$.

Resposta: A

6. Tem-se que $h(0) = -2$:

- $\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-3x}-1}{2x} = \frac{1}{2} \times \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-3x}-1}{x} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-3x}-1}{-3x} = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$. Logo, $\lim_{x\to0^-} h(x) \neq h(0)$ e portanto a função h não é contínua à esquerda do ponto 0.

- $\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 - \text{sen}(4x)}{2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{2x} - \lim_{x\to0^+} \frac{\text{sen}(4x)}{2x} = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{x}{2}\right) - 2 \times \lim_{x\to0^+} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} = \frac{0}{2} - 2 \times 1 = -2$

Se $x \to 0^+$ então $4x \to 0^+$

Logo, $\lim_{x\to0^+} h(x) = h(0)$ e portanto a função h é contínua à direita do ponto 0.

Portanto a função h é contínua em $\mathrm{IR}\setminus\{0\}$, sendo contínua apenas à direita do ponto 0.

Nota: Para $x < 0$ a função h é contínua pois é composição, diferença e quociente entre funções contínuas no seu domínio e para $x > 0$ a função h é contínua pelas mesmas razões.

Resposta: C

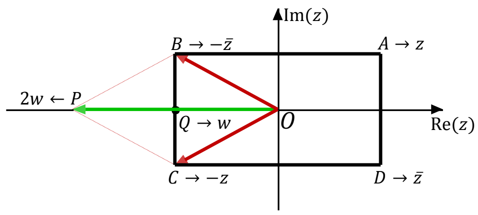
7. Um número real negativo pode ser representado na forma trigonométrica por $\rho\mathrm{cis}\pi$, com $\rho \in \mathrm{IR}^+$. Assim:

$$\sqrt[6]{\rho\mathrm{cis}\pi} = \sqrt[6]{\rho}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ \text{com } k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

A raiz sexta que se obtém para $k = 1$ é $\sqrt[6]{\rho}\mathrm{cis}\frac{\pi}{2}$, cuja imagem geométrica pertence à parte positiva do eixo imaginário. Das opções apresentadas, o único hexágono que tem um vértice na parte positiva do eixo imaginário é o da opção $\boxed{\text{C}}$.

Resposta: C

8. O ponto A é a imagem geométrica do número complexo z, portanto o ponto D é a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$, o ponto C é a imagem geométrica do número complexo $-z$ e o ponto B é a imagem geométrica do número complexo $\overline{-z} = -\bar{z}$ (observa a figura).



Pela regra do paralelogramo tem-se:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$$

Assim, $2w = -z + (-\bar{z}) = -z - \bar{z}$

Resposta: B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. $w = \frac{(z_2)^2 \times z_1 + 6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\mathrm{cis}\frac{\pi}{12}\right)^2 \times 2i + 6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{3\mathrm{cis}\frac{\pi}{6} \times 2\mathrm{cis}\frac{\pi}{2} + 6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3} + 6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)+6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} =$

$$= \frac{6\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{-3+3\sqrt{3}i+6}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} \underset{\text{i)}}{=} \frac{6\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = 3\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right) = 3\mathrm{cis}\frac{13\pi}{6} = 3\mathrm{cis}\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

Logo, $\arg(w) = \arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$, mas $|w| \neq |z_3|$ porque $|w| = 3$ e $|z_3| = 1$ e portanto $w \neq z_3$.

i) Cálculo Auxiliar: Para escrever $3 + 3\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica, vem: $\left|3 + 3\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$. Sendo θ um argumento de $3 + 3\sqrt{3}i$, tem-se $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ e $\theta \in 1.^{\circ}$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{3}$. Assim, $3 + 3\sqrt{3}i = 6\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}$.

1.2. Fazendo $z=\rho\text{cis}\theta$, com $z\neq 0$, vem:

$$\frac{z^3\times z_1}{|z|}+4\bar{z}=0 \Leftrightarrow \frac{(\rho\text{cis}\theta)^3\times 2i}{\rho}+4\rho\text{cis}(-\theta)=0 \Leftrightarrow \frac{\rho^3\text{cis}(3\theta)\times 2\text{cis}\frac{\pi}{2}}{\rho}=-4\rho\text{cis}(-\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\rho^2\text{cis}\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)=4\rho\text{cis}(\pi-\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho^2=4\rho \\ 3\theta+\frac{\pi}{2}=\pi-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho^2-4\rho=0 \\ 4\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho(\rho-2)=0 \\ \theta=\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=0 \ \vee\ \rho=2 \\ \theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Se $\rho=0$ então $z=0$ que não é solução, pois $z\neq 0$. Se $\rho=2$ e substituindo k por valores pertencentes ao conjunto $\{0,1,2,3\}$, obtém-se:

$$z=2\text{cis}\frac{\pi}{8} \ \vee\ z=2\text{cis}\frac{5\pi}{8} \ \vee\ z=2\text{cis}\frac{9\pi}{8} \ \vee\ z=2\text{cis}\frac{13\pi}{8}$$

Portanto, o conjunto solução da condição $\frac{z^3\times z_1}{|z|}+4\bar{z}=0 \ \wedge\ z\neq 0$ é $\left\{2\text{cis}\frac{\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{5\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{9\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{13\pi}{8}\right\}$.

2.

2.1. $P(Y|X)$ designa a probabilidade do produto dos números das três fichas retiradas da caixa B ser zero, sabendo que as duas fichas retiradas de A e colocadas em B estão numeradas com o mesmo número. Assim, as fichas retiradas da caixa A e colocadas na caixa B estão numeradas com o número 0 e portanto, para a segunda fase da experiência, ficam na caixa B sete fichas, duas numeradas com o número 0, três numeradas com o número 2 e duas numeradas com o número 3. Logo, o número de casos possíveis é ${}^7C_3$ (das setes fichas da caixa B retiram-se três). Para o produto dos números das três fichas ser zero, pelo menos uma delas tem de estar numerada com o número 0, portanto o número de casos favoráveis é ${}^2C_1\times{}^5C_2+{}^2C_2\times{}^5C_1$ (das duas fichas numeradas com o número 0 retira-se uma e das restantes cinco retiram-se duas ou das duas fichas numeradas com o número 0 retiram-se as duas e das restantes cinco retira-se uma). Assim, pela lei de Laplace, $P(Y|X)=\frac{{}^2C_1\times{}^5C_2+{}^2C_2\times{}^5C_1}{{}^7C_3}=\frac{5}{7}$.

2.2. De acordo com a experiência aleatória enunciada, as somas possíveis são:

- 4 (extraindo uma ficha com o número 0 da caixa A e duas com o número 2 da caixa B), o resto da divisão inteira de 4 por 4 é 0;

- 5 (extraindo a ficha com o número 1 da caixa A e duas fichas com o número 2 da caixa B ou extraindo uma ficha com o número 0 da caixa A, uma com o número 2 da caixa B e uma com o número 3 da caixa B), o resto da divisão inteira de 5 por 4 é 1;

▪ 6 (extraindo uma ficha com o número 0 da caixa A e as duas com o número 3 da caixa B ou extraindo a ficha com o número 1 da caixa A, uma com o número 2 da caixa B e uma com o número 3 da caixa B), o resto da divisão inteira de 6 por 4 é 2;

▪ 7 (extraindo a ficha com o número 1 da caixa A e as duas fichas com o número 3 da caixa B), o resto da divisão inteira de 7 por 4 é 3.

Portanto, a variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2 e 3, isto é $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Para qualquer valor da variável aleatória X o número de casos possíveis é ${}^3C_1 \times {}^5C_2 = 30$. Tem-se que:

▪ $P(X = 0) = P(\text{soma dos números das três fichas ser } 4) = \frac{{}^2C_1 \times {}^3C_2}{30} = \frac{1}{5}$

▪ $P(X = 1) = P(\text{soma dos números das três fichas ser } 5) = \frac{{}^1C_1 \times {}^3C_2 + {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1}{30} = \frac{1}{2}$

▪ $P(X = 2) = P(\text{soma dos números das três fichas ser } 6) = \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_2 + {}^1C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1}{30} = \frac{4}{15}$

▪ $P(X = 3) = P(\text{soma dos números das três fichas ser } 7) = \frac{{}^1C_1 \times {}^2C_2}{30} = \frac{1}{30}$

Portanto a tabela apresentada é a da distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

3. A variável aleatória X: «volume de tinta, em ml, dos tinteiros» segue uma distribuição normal cujo valor médio vamos designar por μ e o desvio padrão por σ, isto é $\mathrm{N}\sim(\mu, \sigma)$. Tem-se que $P(41{,}86 < X < 42{,}14) = 95{,}45\%$ como o intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ é o único intervalo de amplitude 4σ em que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95{,}45\%$, vem que $\mu - 2\sigma = 41{,}86$ e $\mu + 2\sigma = 42{,}14$, portanto:

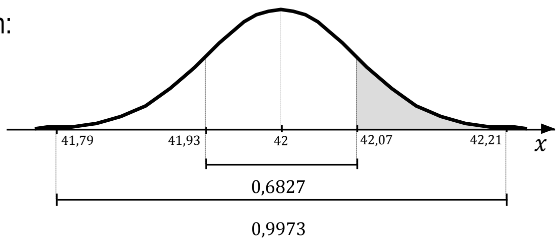
$$\mu = \frac{41{,}86 + 42{,}14}{2} = 42 \text{ e } \mu + 2\sigma = 42{,}14 \Leftrightarrow 42 + 2\sigma = 42{,}14 \Leftrightarrow \sigma = \frac{42{,}14 - 42}{2} \Leftrightarrow \sigma = 0{,}07$$

Nota: Os valores de μ e σ podem ser obtidos resolvendo o sistema $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 41{,}86 \\ \mu + 2\sigma = 42{,}14 \end{cases}$

Tem-se então que $\mu + \sigma = 42{,}07$ e $\mu + 3\sigma = 42{,}21$. Assim:

$P(42{,}07 < X < 42{,}21) = \frac{0{,}9973 - 0{,}6827}{2} = 0{,}1573$

Logo, a probabilidade pedida é $0{,}1573$.



4.

4.1. Tem-se:

$$\begin{cases} A(0) = 7 \\ A(5) = 3{,}31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\mathrm{e}^0 = 7 \\ a\mathrm{e}^{-5b} = 3{,}31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1 = 7 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ 7\mathrm{e}^{-5b} = 3{,}31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ \mathrm{e}^{-5b} = \frac{3{,}31}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ -5b = \ln\left(\frac{3{,}31}{7}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = \frac{\ln\left(\frac{3{,}31}{7}\right)}{-5} \approx 0{,}15 \end{cases}$$

Portanto, $a = 7$ e $b \approx 0{,}15$.

4.2.

4.2.1. Tem-se $\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{7\mathrm{e}^{-0{,}15(t+1)}}{7\mathrm{e}^{-0{,}15t}} = \frac{\mathrm{e}^{-0{,}15t-0{,}15}}{\mathrm{e}^{-0{,}15t}} = \mathrm{e}^{-0{,}15t-0{,}15+0{,}15t} = \mathrm{e}^{-0{,}15} \approx 0{,}86$. A massa do elemento radioativo A reduz-se 14% por ano ($100\% - 86\% = 14\%$).

4.2.2. Tem-se:

$$A(t) - B(t) = 2 \Leftrightarrow 7\mathrm{e}^{-0{,}15t} - 3\mathrm{e}^{-0{,}3t} = 2 \Leftrightarrow -3\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 7\mathrm{e}^{-0{,}15t} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3(\mathrm{e}^{-0{,}15t})^2 + 7\mathrm{e}^{-0{,}15t} - 2 = 0$$

Fazendo $y = \mathrm{e}^{-0{,}15t}$ vem:

$$-3y^2 + 7y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \ \vee \ y = 2 \underset{y=\mathrm{e}^{-0{,}15t}}{\Leftrightarrow} \mathrm{e}^{-0{,}15t} = \frac{1}{3} \ \vee \ \mathrm{e}^{-0{,}15t} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}15t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \ \vee \ -0{,}15t = \ln 2$$

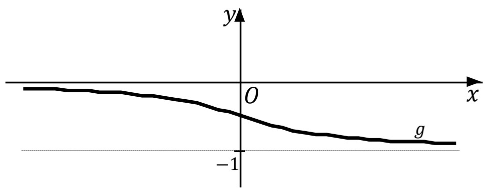
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0{,}15} \approx 7{,}324 \ \vee \ t = \frac{\ln 2}{-0{,}15} \approx -4{,}621$$

Logo, $t \approx 7{,}324$ e portanto a diferença entre a massa da amostra do elemento radioativo A e a massa da amostra do elemento radioativo B é de 2 mg passados, aproximadamente, sete anos e quatro meses ($0{,}324 \times 12 \approx 4$).

5. Seguindo a sugestão, vamos provar que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $[0, 2]$. Provando que a função h tem pelo menos um zero, fica provado que 0 pertence ao contradomínio de h. Tem-se:

▪ $f(0) \times f(2) < 0 \Longrightarrow f(0)$ e $f(2)$ têm sinais contrários.

▪ Como g é estritamente decrescente em IR e as retas de equações $y = -1$ e $y = 0$ são assíntotas do seu gráfico vem que $D'_g =]-1, 0[$, ou seja, $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ -1 < g(x) < 0$ (na figura abaixo está uma possível representação gráfica da função g).



▪ $h(x) = \frac{f(x)\times g(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)\times(g(x)+1)}{g(x)} = f(x) \times \frac{g(x)+1}{g(x)}$. Assim, como $-1 < g(x) < 0,\ \ \forall\, x \in \mathrm{IR}$, vem $0 < g(x) + 1 < 1, \forall\, x \in \mathrm{IR}$ e portanto $\frac{g(x)+1}{g(x)} < 0, \forall\, x \in \mathrm{IR}$.

A função h é contínua em IR, pois é produto, soma e quociente entre funções contínuas em IR, logo h é contínua em $[0, 2] \subset \mathrm{IR}$. Tem-se:

$$h(0) = f(0) \times \underbrace{\frac{g(0)+1}{g(0)}}_{<0} \qquad \text{e} \qquad h(2) = f(2) \times \underbrace{\frac{g(2)+1}{g(2)}}_{<0}$$

Logo, como $f(0)$ e $f(2)$ têm sinais contrários então $h(0)$ e $h(2)$ também têm sinais contrários e portanto pelo corolário do teorema de Bolzano $\exists\, c \in]0, 2[\colon h(c) = 0 \Longrightarrow 0$ pertence ao contradomínio da função h.

6. Tem-se $g(x) = (-6x-6)\ln(x^2+2x+1) + x^3 = (-6x-6)\ln((x+1)^2) + x^3$, assim:

- $g'(x) = -6\ln((x+1)^2) + (-6x-6) \times \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + 3x^2 = -6\ln((x+1)^2) - 6(x+1) \times \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + 3x^2 =$

$$= -6\ln((x+1)^2) - \frac{12(x+1)^2}{(x+1)^2} + 3x^2 = -6\ln((x+1)^2) - 12 + 3x^2$$

$$g''(x) = -6 \times \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + 6x = \frac{-12}{x+1} + 6x = \frac{6x^2+6x-12}{x+1}$$

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12 = 0 \ \wedge \ x+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x=-2 \ \vee \ x=1) \ \wedge \ x \neq -1$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$6x^2+6x-12$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cap$	p.i.	$\cup$	n.d.	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2]$ e em $]-1,1]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-2,-1[$ e em $[1,+\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x=-2$ e em $x=1$.

7.

7.1.

- Tem-se $g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = -\frac{1}{2}\cos(\pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(0) + \operatorname{sen}(0)\right) = \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = 2$. Assim a área colorida da figura é dada por $A_{[AOB]} - \left(g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)\right) = \frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2} - 2$.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\operatorname{sen}x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee \ 2\operatorname{sen}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee \ \operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0,\pi]$, vem $x = \frac{\pi}{2}$ e portanto $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow \overline{OB} = \frac{\pi}{2}$.

A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A, assim $m_t = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, como $f'(x) = 2\cos(2x) - \operatorname{sen}x$, vem:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

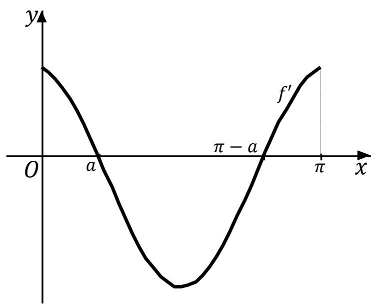
Assim, a equação reduzida da reta t é do tipo $y = -3x + b$ e como o ponto $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pertence à reta t, tem-se:

$$0 = -3 \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{3\pi}{2}$$

Logo, a equação reduzida da reta t é $y = -3x + \frac{3\pi}{2}$ e portanto $A\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \overline{OA} = \frac{3\pi}{2}$.

$$\therefore A_{\text{colorida}} = \frac{\overline{OB} \times \overline{OA}}{2} - 2 = \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{3\pi}{2}}{2} - 2 = \frac{\frac{3\pi^2}{4}}{2} - 2 = \frac{3\pi^2}{8} - 2 = \frac{3\pi^2 - 16}{8}$$

7.2. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f'(x) = 2\cos(2x) - \operatorname{sen}x$ na janela de visualização $[0, \pi] \times [-3, 3]$.



Fazendo um quadro de variação do sinal da função f', vem:

x	0		a		$\pi - a$		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	min.	↗	máx.	↘	min.	↗	máx.

A função f é decrescente em $[a, \pi - a]$, é crescente em $[0, a]$ e em $[\pi - a, \pi]$, tem um mínimo relativo em $x = 0$ e em $x = \pi - a$ e tem um máximo relativo em $x = a$ e em $x = \pi$, em que $a \approx 0{,}63$ e $\pi - a \approx 2{,}51$.