PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME – TIPO 6

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Tem-se:

$$\log_b(a^5) + x = a^{\log_a 15 + 3\log_a 2} \underset{a=b^3}{\Leftrightarrow} x = a^{\log_a 15} \times a^{3\log_a 2} - \log_b((b^3)^5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 15a^{\log_a(2^3)} - \log_b(b^{15})$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \times 8 - 15 \Leftrightarrow x = 105$$

Assim, $y = -455\log_b\left(\frac{1}{b}\right) + x \Leftrightarrow y = -455\log_b(b^{-1}) + 105 \Leftrightarrow y = -455 \times (-1) + 105 \Leftrightarrow y = 560$.

Resposta: B

2. Tem-se:

$$\mu = 1 \times \text{sen}^2 x + 2(\cos(2x) + \text{sen}^2 x) = \text{sen}^2 x + 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x) =$$

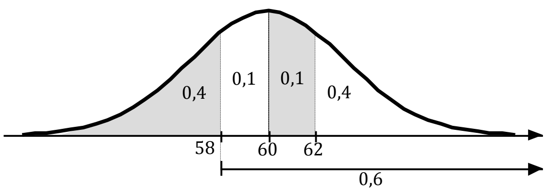
$$= \text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

Resposta: A

3. Considere-se a variável aleatória X: «peso dos alunos do 12.º ano» ($X \sim \text{N}(60, \sigma)$) e os acontecimentos A: «o aluno escolhido pesa entre 60 kg e 62 kg» e B: «o aluno escolhido pesa pelo menos 58 kg». Assim:

$$P(A) = P(60 \le X \le 62) \quad \text{e} \quad P(B) = P(X \ge 58)$$

Observa a figura seguinte:



Pretende-se determinar $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Tem-se que $P(A \cap B) \underset{A \subset B}{=} P(A) = P(60 \le X \le 62) = 0{,}1$ e $P(B) = P(X \ge 58) = 0{,}6$. Logo, $P(A|B) = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$.

Resposta: C

4. Tem-se $\lim x_n = \lim(-n^2 \times 3^{-n}) = -\lim \frac{n^2}{3^n} = 0^-$. Portanto, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim h(x_n) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(-x+1)}{-x} = -1$$

Se $x \to 0^-$ então $-x \to 0^+$

Resposta: A

5.

▪ A afirmação **I** é verdadeira pois:

$$(-1)^n \times n^2 = -n^2 \to -\infty \text{, se } n \text{ é ímpar} \quad \text{e} \quad (-1)^n \times n^2 = n^2 \to +\infty \text{, se } n \text{ é par}$$

Logo, como a função f é contínua em IR, pelo teorema de Bolzano pode-se concluir que $D'_f = \text{IR}$ e portanto para todo o $c \in \text{IR}$, existe pelo menos um $x \in \text{IR}$ tal que $f(x) = c$, ou seja a equação $f(x) = c$ é possível em IR, $\forall\, c \in \text{IR}$.

▪ A afirmação **II** também é verdadeira. De facto, sendo k um número natural, tem-se que f é contínua em $[k, k+1]$, pois é contínua em IR. Como, para todo o $k \in \text{IN}$, $f(k)$ e $f(k+1)$ têm sinais contrários, então pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo menos um $c \in]k, k+1[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função f tem pelo menos um zero em cada intervalo da forma $]k, k+1[$ e portanto tem infinitos zeros.

Cálculos auxiliares:

▪ Se k é par então $k+1$ é ímpar, então:

$$f(k) = (-1)^k \times k^2 = k^2 \Longrightarrow f(k) > 0 \quad \text{e} \quad f(k+1) = (-1)^{k+1} \times (k+1)^2 = -(k+1)^2 \Longrightarrow f(k+1) < 0$$

▪ Se k é ímpar então $k+1$ é par, então:

$$f(k) = (-1)^k \times k^2 = -k^2 \Longrightarrow f(k) < 0 \quad \text{e} \quad f(k+1) = (-1)^{k+1} \times (k+1)^2 = (k+1)^2 \Longrightarrow f(k+1) > 0$$

Portanto, para todo o $k \in \text{IN}$, $f(k)$ e $f(k+1)$ têm sinais contrários.

▪ A afirmação **III** é falsa. Considerando a função $g(x) = f(x) - f(2x)$ tem-se que f é contínua em IR, logo é contínua em $[1, 2] \subset \text{IR}$. $g(1)$ e $g(2)$ têm o mesmo sinal e portanto o teorema de Bolzano não permite concluir sobre a existência de zeros da função g em $[1, 2]$ e consequentemente não é possível concluir se a equação $f(x) = f(2x)$ é possível ou impossível em $[1, 2]$. Assim, a afirmação não é necessariamente verdadeira.

Cálculos auxiliares:

$$g(1) = f(1) - f(2) = (-1)^1 \times 1^2 - (-1)^2 \times 2^2 = -5 \quad \text{e} \quad g(2) = f(2) - f(4) = (-1)^2 \times 2^2 - (-1)^4 \times 4^2 = -12$$

Resposta: D

6. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, onde $f(a) = 3$, logo $m_r = f'(a)$. Assim, vem:

- $f(a) = 3 \Leftrightarrow 3 + 2\ln(a-1) = 3 \Leftrightarrow 2\ln(a-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(a-1) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow a = 2$

- $f'(x) = \frac{2}{x-1}$

Logo, $m_r = f'(2) = \frac{2}{2-1} = 2$. Assim, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e portanto $\alpha \approx 1{,}11$ rad.

Resposta: B

7. As raízes de índice 8 de w são dadas por $\sqrt[8]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{8}\right)$, $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Como os pontos A e B são as imagens geométricas de duas raízes de índice 8 de w vem que $\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$ e que $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Logo, $A_{\text{setor}AOB} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \times 2 = \frac{\pi}{4}$.

Resposta: B

8. Fazendo $z = \rho\operatorname{cis}\theta$ e $z_1 = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1)$, vem:

$$\frac{z^{n+2}}{(\bar{z})^n} = z_1 \Leftrightarrow \frac{(\rho\operatorname{cis}\theta)^{n+2}}{\left(\rho\operatorname{cis}(-\theta)\right)^n} = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1) \Leftrightarrow \frac{\rho^{n+2}\operatorname{cis}(\theta n + 2\theta)}{\rho^n\operatorname{cis}(-\theta n)} = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}(2\theta n + 2\theta) = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1) \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}\big(\theta(2n+2)\big) = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \rho_1 \\ \theta(2n+2) = \theta_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \pm\sqrt{\rho_1} \\ \theta = \frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2k\pi}{2n+2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para $k = 0$ vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2}\right)$

Para $k = 1$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+2\pi}{2n+2}\right)$

⋮

Para $k = n$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2n\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+2n\pi}{2n+2}\right)$

⋮

Para $k = 2n$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\times 2n\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+4n\pi}{2n+2}\right)$

Para $k = 2n+1$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\times(2n+1)\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+(4n+2)\pi}{2n+2}\right)$

Para $k = 2n+2$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\times\cancel{(2n+2)}\pi}{\cancel{2n+2}}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + 2\pi\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2}\right)$

Logo as soluções da equação $\frac{z^{n+2}}{(\bar{z})^n} = z_1$ são da forma $z = \sqrt{\rho_1}\text{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2k\pi}{2n+2}\right)$, com $k \in \{0, 1, 2 \dots, n, \dots, 2n, 2n+1\}$, portanto a equação tem $2n+2$ soluções (a partir de $k = 2n+2$ as soluções repetem-se).

Resposta: D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Tem-se:

$$z_1 = \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^5 \times \left(\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^{21} + 16\sqrt{3}}{i^{3-16n} \times \text{cis}(-2\beta)} \underset{\text{i)}}{=} \frac{\left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 \times i^{21} + 16\sqrt{3}}{i^3 \times i^{-16n} \times \text{cis}(-2\beta)} = \frac{2^5\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \times i^{4\times5+1} + 16\sqrt{3}}{-i \times i^{4\times(-4n)} \times \text{cis}(-2\beta)} =$$

$$= \frac{32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right) \times i + 16\sqrt{3}}{-i \times 1 \times \text{cis}(-2\beta)} = \frac{32\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times i + 16\sqrt{3}}{-i \times \text{cis}(-2\beta)} = \frac{\left(16 + 16\sqrt{3}i\right) \times i + 16\sqrt{3}}{-i \times \text{cis}(-2\beta)} = \frac{16i + 16\sqrt{3}i^2 + 16\sqrt{3}}{-i \times \text{cis}(-2\beta)}$$

$$= \frac{16i - 16\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{-i \times \text{cis}(-2\beta)} = \frac{16i}{-i \times \text{cis}(-2\beta)} = -\frac{16}{\text{cis}(-2\beta)} = -\frac{16\text{cis}(0)}{\text{cis}(-2\beta)} = -16\text{cis}(0 + 2\beta) = -16\text{cis}(2\beta)$$

i) Cálculo auxiliar: Para escrever $1 - \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica vem, $\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Sendo θ um argumento de $1 - \sqrt{3}i$, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ e $\theta \in 4.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Assim, $1 - \sqrt{3}i = 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Tem-se $\text{sen}\beta = \frac{1}{4}$, assim:

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{15}{16}}.$$

Como $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, vem $\cos\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Logo:

$$z_1 = -16\text{cis}(2\beta) = -16\left(\cos(2\beta) + i\text{sen}(2\beta)\right) = -16\left(\cos^2\beta - \text{sen}^2\beta + 2i\text{sen}\beta\cos\beta\right) =$$

$$= -16\left(\frac{15}{16} - \frac{1}{16} + 2i \times \frac{1}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right) - 16\left(\frac{14}{16} - \frac{2\sqrt{15}}{16}i\right) = -14 + 2\sqrt{15}i$$

1.2. Para $\beta=\frac{\pi}{4}$ tem-se $z_1=-16\operatorname{cis}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=-16\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=-16i$. Assim vem:

$$\left(1\leq\left|-z+\frac{z_1}{8}\right|\leq 2\ \wedge\ \operatorname{Re}(z+iz)\geq 2\right)\ \vee\ \operatorname{Im}(\bar{z})<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1\leq\left|-z+\frac{-16i}{8}\right|\leq 2\ \wedge\ \operatorname{Re}(z+iz)\geq 2\right)\ \vee\ \operatorname{Im}(\bar{z})<0$$

$$\Leftrightarrow(1\leq|-z-2i|\leq 2\ \wedge\ \operatorname{Re}(z+iz)\geq 2)\ \vee\ \operatorname{Im}(\bar{z})<0$$

$$\Leftrightarrow(1\leq|z+2i|\leq 2\ \wedge\ \operatorname{Re}(z+iz)\geq 2)\ \vee\ \operatorname{Im}(\bar{z})<0$$

▪ A condição $1\leq|z+2i|\leq 2$ representa o conjunto de pontos do plano complexo situados entre as circunferências centradas no ponto $A(0,-2)$, afixo do número complexo $-2i$, e raios 1 e 2, fronteiras incluídas (a região representada pela condição é uma coroa circular).

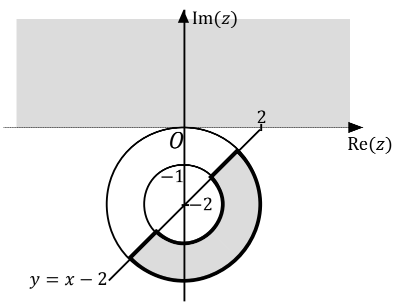
Fazendo $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, vem:

▪ $\operatorname{Re}(z+iz)\geq 2\Leftrightarrow\operatorname{Re}\big(x+yi+i(x+yi)\big)\geq 2\Leftrightarrow\operatorname{Re}(x+yi+xi+yi^2)\geq 2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\operatorname{Re}\big(x-y+i(y+x)\big)\geq 2\Leftrightarrow x-y\geq 2\Leftrightarrow -y\geq 2-x\Leftrightarrow y\leq x-2$$

▪ $\operatorname{Im}(\bar{z})<0\Leftrightarrow\operatorname{Im}(x-yi)<0\Leftrightarrow -y<0\Leftrightarrow y>0.$

A região do plano definida pela condição é:



2.

2.1. Para n para ou para n ímpar, o número de casos possíveis é ${}^{2n}C_3$ (dos $2n$ vértices do prisma escolhem-se três). O plano xOy é o plano de equação $z=0$, pelo que, se n é par existem $\frac{n-2}{2}$ planos estritamente paralelos a xOy que podem ser definidos com vértices do prisma, e se n é ímpar existem $\frac{n-3}{2}$ planos estritamente paralelos a xOy que podem ser definidos com vértices do prisma. Como cada um desses planos contém quatro vértices do prisma, então para n par o número de casos favoráveis $\frac{n-2}{2}\times{}^4C_3$ e para n ímpar é $\frac{n-3}{2}\times{}^4C_3$.
Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer um dos vértices do prisma tem igual probabilidade de ser escolhido, a regra de Laplace pode ser aplicada a este problema. Assim, probabilidade pedida é $\frac{\frac{n-2}{2}\times{}^4C_3}{{}^{2n}C_3}=\frac{(n-2)\times{}^4C_3}{2\times{}^{2n}C_3}$ se n é par e $\frac{\frac{n-3}{2}\times{}^4C_3}{{}^{2n}C_3}=\frac{(n-3)\times{}^4C_3}{2\times{}^{2n}C_3}$ se n é ímpar.

2.2. Considere-se a variável aleatória X: «número de vezes que sai face pintada de azul em seis repetições da experiência». A variável aleatória X segue uma distribuição binomial de parâmetros $n=6$ e $\frac{p}{n}$, isto é, $X\sim\mathrm{Bin}\left(6,\frac{p}{n}\right)$ (como se pode ou não escolher a mesma face, em cada uma das seis repetições da experiência a probabilidade de se escolher uma face pintada de azul é sempre $\frac{p}{n}$). Pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento «escolher face pintada de azul» ocorrer no mínimo duas vezes e no máximo quatro vezes, isto é, $P(2\le X\le 4)$.

Assim:

$$P(2\le X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$$

$$={}^6C_2\times\left(\frac{p}{n}\right)^2\left(1-\frac{p}{n}\right)^4+{}^6C_3\times\left(\frac{p}{n}\right)^3\left(1-\frac{p}{n}\right)^3+{}^6C_4\times\left(\frac{p}{n}\right)^4\left(1-\frac{p}{n}\right)^2$$

$$=\left(\frac{p}{n}\right)^2\left(1-\frac{p}{n}\right)^2\times\left(15\times\left(1-\frac{p}{n}\right)^2+20\times\left(\frac{p}{n}\right)\left(1-\frac{p}{n}\right)+15\times\left(\frac{p}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{p^2}{n^2}\times\frac{(n-p)^2}{n^2}\times\left(15\times\frac{(n-p)^2}{n^2}+20\times\frac{p}{n}\times\frac{n-p}{n}+15\times\frac{p^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{p^2\times(n-p)^2}{n^4}\times\left(\frac{15(n-p)^2}{n^2}+\frac{20np-20p^2}{n^2}+\frac{15p^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\left(np-p^2\right)^2}{n^4}\times\frac{15n^2-30np+15p^2+20np-20p^2+15p^2}{n^2}=\frac{\left(np-p^2\right)^2\left(15n^2-10np+10p^2\right)}{n^6}$$

3. Tem-se:

$$P(\bar{B}) \times \left(1 - P(A|B)\right) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{P(\bar{B})} - P(\bar{B}) \times P(A|B) + P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A}) + \cancel{P(\bar{B})}$$

$$\Leftrightarrow -\left(1 - P(B)\right) \times P(A|B) + 1 - P(A \cap B) = P(\bar{A})$$

$$\Leftrightarrow (P(B) - 1) \times P(A|B) + \cancel{1} - P(A \cap B) = \cancel{1} - P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(B) \times P(A|B) - P(A|B) - P(A \cap B) = -P(A)$$

$$\underset{\text{i)}}{\Leftrightarrow} \cancel{P(A \cap B)} - P(A|B) - \cancel{P(A \cap B)} = -P(A)$$

$\Leftrightarrow -P(A|B) = -P(A) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \;\Leftrightarrow A$ e B independentes

i) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$

4.

4.1. Tem-se que $D_g = \{x \in \mathrm{IR}: x \neq 0\} = \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 2x\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{0^-}} - 2 \times 0 = \mathrm{e}^{-\infty} - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 2x\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{0^+}} - 2 \times 0 = \mathrm{e}^{+\infty} - 0 = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função g. Como a função g é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 2x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} - 2\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{-\infty}}}{-\infty} - 2 = \frac{\mathrm{e}^{0}}{-\infty} - 2 = \frac{1}{-\infty} - 2 =$$

$$= 0 - 2 = -2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{-\infty}}=\mathrm{e}^{0}=1$$

A reta de equação $y=-2x+1$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to-\infty$.

Quando $x\longrightarrow+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}-\frac{2x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}-2\right)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{+\infty}}}{+\infty}-2=\frac{\mathrm{e}^{0}}{+\infty}-2=\frac{1}{+\infty}-2=$$

$$=0-2=-2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{+\infty}}=\mathrm{e}^{0}=1$$

A reta de equação $y=-2x+1$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to+\infty$.

4.2. Tem-se $\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-\cancel{2x}=g(x)+2\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-\cancel{2x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x+2\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2=0\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{2}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2=0$

Fazendo $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ vem:

$$y^2-y-2=0\Leftrightarrow y=-1\ \vee\ y=2\underset{y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\Leftrightarrow}\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-1}_{\text{eq. impossível}}\ \vee\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=2\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=2\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\ln 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln 2}\underset{1=\ln\mathrm{e}}{\Leftrightarrow}x=\frac{\ln\mathrm{e}}{\ln 2}\underset{\text{i)}}{\Leftrightarrow}x=\log_2\mathrm{e}$$

i) Mudança de base: $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_a b}$, com $a,b\in\mathrm{IR}^{+}\backslash\{1\}$ e $x\in\mathrm{IR}^{+}$

4.3. Tem-se:

- $g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2$

$$g''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'=\frac{2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\frac{2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=$$

$$=2x\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}\times(2x+1)$$

- $g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}\times(2x+1)=0\Leftrightarrow\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}=0}_{\text{eq. impossível em IR}\backslash\{0\}}\ \vee\ 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
i) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$	$+$	$+$	$+$	n.d.	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	n.d.	$+$
$g(x)$	$\cap$	p.i.	$\cup$	n.d.	$\cup$

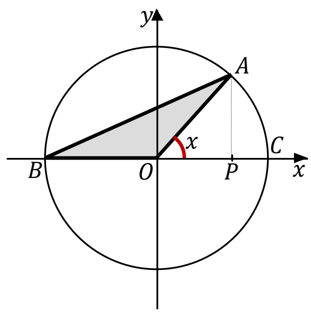
i) Observa que $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} > 0,\ \forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$, porque $e^{\frac{1}{x}} > 0$ e $x^4 > 0,\ \forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e em $]0, +\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x = -\frac{1}{2}$.

5.

5.1. Seja P o ponto de interseção do eixo Ox com a reta que contém o ponto A e é paralela ao eixo Oy, como representado na figura.

Tem-se:



$$p(x) = P_{[OAB]} = \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{AB} = 2 + 2 + \overline{AB} = 4 + \overline{AB}$$

Tem-se $B(-2, 0)$ e como $\cos x = \frac{\overline{OP}}{2} \Leftrightarrow \overline{OP} = 2\cos x$ e $\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AP}}{2} \Leftrightarrow \overline{AP} = 2\operatorname{sen} x$, vem que as coordenadas do ponto A são $(2\cos x, 2\operatorname{sen} x)$.

Assim:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2\cos x + 2)^2 + (2\operatorname{sen} x - 0)^2} = \sqrt{4\cos^2 x + 8\cos x + 4 + 4\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \sqrt{4\underbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}_{1} + 8\cos x + 4} = \sqrt{4 \times 1 + 8\cos x + 4}$$

$$= \sqrt{8 + 8\cos x} = \sqrt{4(2 + 2\cos x)} = \sqrt{4} \times \sqrt{2 + 2\cos x} = 2\sqrt{2 + 2\cos x}$$

Portanto, $P(x) = P_{[OAB]} = 4 + \overline{AB} = 4 + 2\sqrt{2 + 2\cos x}$.

5.2. Tem-se

$$p'(x) = \left(4 + 2\sqrt{2 + 2\cos x}\,\right)' = \left(4 + 2(2 + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}\right)' = 2 \times \frac{1}{2} \times (2 + 2\cos x)^{\frac{1}{2}-1} \times (2 + 2\cos x)' =$$

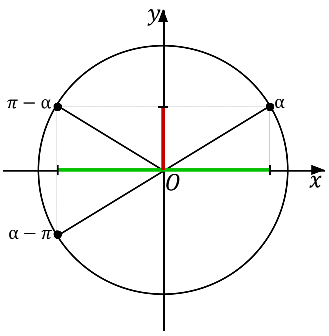
$$= (2 + 2\cos x)^{-\frac{1}{2}} \times (-2\operatorname{sen} x) = \frac{1}{(2+2\cos x)^{\frac{1}{2}}} \times (-2\operatorname{sen} x) = -\frac{2\operatorname{sen} x}{\sqrt{2+2\cos x}}$$

Assim:

$$\frac{p'(\pi-\alpha)}{p(\alpha-\pi)-4} = \frac{-\frac{2\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}{\sqrt{2+2\cos(\pi-\alpha)}}}{4+2\sqrt{2+2\cos(\alpha-\pi)}-4} \underset{\text{i)}}{=} \frac{-\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}}{2\sqrt{2-2\cos\alpha}} = \frac{-2\operatorname{sen}\alpha}{2\left(\sqrt{2-2\cos\alpha}\right)^2} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2-2\cos\alpha} \underset{\text{ii)}}{=} -\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2-2\times\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cálculos auxiliares:

i)



$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$

ii) Tem-se que $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, assim:

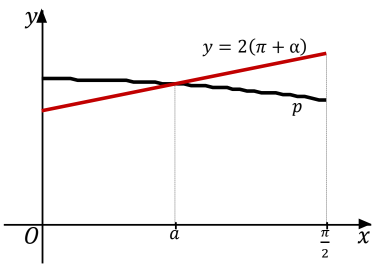
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vem $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Tem-se que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, pelo que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \times \operatorname{tg}\alpha$. Assim:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \times \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5.3. A amplitude, em radianos, do arco BDA é $\pi + x$, portanto o seu comprimento é igual a $2(\pi + x)$. Pretende-se determinar o valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de modo que $p(x) = 2(\pi + x)$. Utilizando o editor de funções da calculadora, definem-se as funções $y_1 = p(x)$ e $y_2 = 2(\pi + x)$ na janela de visualização $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 10]$.



Logo, $p(x) = 2(\pi + x) \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 0{,}73$.

6. A função f é contínua em $x=-1$ se e só se $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$. Assim:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\cos(x+1)-1}{x+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -1^-} \frac{(\cos(x+1)-1)(\cos(x+1)+1)}{(x+1)(\cos(x+1)+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\cos^2(x+1)-1}{(x+1)(\cos(x+1)+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{-\mathrm{sen}^2(x+1)}{(x+1)(\cos(x+1)+1)} = -\lim_{x\to -1^-} \left(\frac{\mathrm{sen}(x+1)}{x+1} \times \frac{\mathrm{sen}(x+1)}{\cos(x+1)+1}\right) \underset{\text{i)}}{=} -\lim_{y\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}y}{y} \times \lim_{y\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}y}{\cos y+1}$$

$$= -1 \times \frac{\mathrm{sen}(0)}{\cos(0)+1} = -1 \times \frac{0}{1+1} = -1 \times 0 = 0$$

i) Mudança de variável: Se $x \to -1^-$ então $x+1 \to 0^-$. Seja $y = x+1$, $y \to 0^-$.

Como $f(-1) = \ln a$, tem-se $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow a = 1$ (obviamente que se fica a saber que $f(-1) = 0$).

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(\frac{x+1}{-\mathrm{e}^{x+2}+\mathrm{e}} + a\mathrm{e}^b\right) \underset{a=1}{=} \lim_{x\to -1^+} \left(\frac{x+1}{-\mathrm{e}^{x+2}+\mathrm{e}} + \mathrm{e}^b\right) \underset{\text{ii)}}{=} \mathrm{e}^b + \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{-\mathrm{e}^{y-1+2}+\mathrm{e}} =$$

$$= \mathrm{e}^b + \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{-\mathrm{e}^{y+1}+\mathrm{e}} = \mathrm{e}^b + \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{-\mathrm{e}^y \times \mathrm{e}+\mathrm{e}} = \mathrm{e}^b + \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{-\mathrm{e}(\mathrm{e}^y-1)} =$$

$$= \mathrm{e}^b - \frac{1}{\mathrm{e}} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\mathrm{e}^y-1} = \mathrm{e}^b - \frac{1}{\mathrm{e}} \times 1 = \mathrm{e}^b - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

ii) Mudança de variável: Se $x \to -1^+$ então $x+1 \to 0^+$. Seja $y = x+1 \Leftrightarrow x = y-1$, $y \to 0^+$.

Portanto, como $f(-1) = 0$, tem-se $\mathrm{e}^b - \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^b = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow b = -1$.