PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME–TIPO 7

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

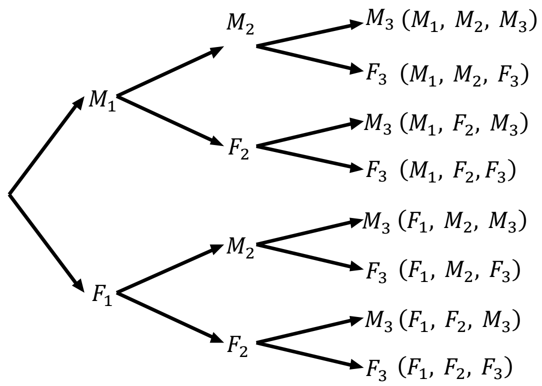
1. Nas condições do enunciado, o número de triângulos que se podem formar com três dos doze pontos é ${}^5C_2 \times {}^7C_1 + {}^5C_1 \times {}^7C_2 = 175$ (dos cinco pontos da reta r escolhem-se dois e dos sete pontos da reta s escolhe-se um ou dos cinco pontos da reta r escolhe-se um e dos sete pontos da reta s escolhem-se dois.

Resposta: C

2. Sejam M_n e F_n os acontecimentos:

M_n: «o n-ésimo filho é do sexo masculino» e F_n: «o n-ésimo filho é do sexo feminino», com $n \in \{1, 2, 3\}$

Utilizando um diagrama de árvore, vem:



Pretende-se determinar a probabilidade dos três filhos do casal serem do mesmo sexo, sabendo que um deles é rapariga. Assim, o número de casos possíveis é 7 (os sete em que pelo menos um dos filhos é rapariga: (M_1, M_2, F_3), (M_1, F_2, M_3), (M_1, F_2, F_3), (F_1, M_2, M_3), (F_1, M_2, F_3), (F_1, F_2, M_3) e (F_1, F_2, F_3)), destes, o único caso em que os filhos são todos do mesmo sexo é (F_1, F_2, F_3), portanto o número de casos favoráveis é 1.

Como os casos possíveis são todos equiprováveis (têm todos probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ de ocorrer), pode-se aplicar a lei de Laplace. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{7}$.

Resposta: B

3. Como A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ e $\bar{A}$ e B também são independentes **i)**.

Portanto, $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) \underset{\text{ii)}}{=} 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Cálculos auxiliares:

i) Nota: $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A) \times P(B)}{P(B)} = \frac{P(B) \times (1 - P(A))}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\bar{A})$. Logo, se A e B são independentes então $\bar{A}$ e B também são independentes.

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0{,}8 = P(A) + 0{,}2 - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow 0{,}6 = P(A) - 0{,}2P(A) \Leftrightarrow 0{,}6 = 0{,}8P(A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

Resposta: A

4. Sendo B o ponto de interseção do eixo Ox com a reta que contém o ponto Q e é paralela ao eixo Oy, vem $A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OP}\times\overline{BQ}}{2}$.

▪ $g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x+6} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x+6} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x+6} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Logo, $P(3,0)$ e portanto $\overline{OP} = 3$.

▪ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \cancel{1} = \mathrm{e}^{-2x+6} - \cancel{1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2x+6} \Leftrightarrow x = -2x + 6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $Q\big(2, f(2)\big)$ e $B(2,0)$. Como $f(2) = \mathrm{e}^2 - 1$, vem $Q(2, \mathrm{e}^2 - 1)$ e portanto $\overline{BQ} = \mathrm{e}^2 - 1$.

Assim, $A_{[OPQ]} = \frac{3\times(\mathrm{e}^2-1)}{2} = \frac{3}{2}(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}+1)$.

Resposta: A

5. Como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, então também o é em $x = a$. A função g é contínua em $x = a$ se e só se $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = g(a)$, assim:

▪ $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{x\to a^-} \mathrm{e}^{-\ln(-h(x))} = \mathrm{e}^{-\ln(-h(a))} \underset{\text{i)}}{=} \mathrm{e}^{-\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln(3^{-1})} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}$

i) A função h é estritamente crescente em $]-\infty, a]$, logo é injetiva e portanto $a = h^{-1}(-3) \Leftrightarrow h(a) = -3$.

▪ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \log_8(x+2) = \log_8(a+2)$

▪ $g(a) = \mathrm{e}^{-\ln(-h(a))} = \frac{1}{3}$

Logo, $\log_8(a+2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a + 2 = 8^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow a + 2 = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow a + 2 = 2 \Leftrightarrow a = 0$.

Resposta: D

6. Como $a \in \left]0, \pi\right[\backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, vem $0 < \mathrm{sen}(a) < 1$ e portanto $\ln\big(\mathrm{sen}(a)\big) < 0 \Leftrightarrow -\ln\big(\mathrm{sen}(a)\big) > 0$.

Logo, $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0 \Longrightarrow f(a)$ é um mínimo relativo da função f.

Resposta: D

7. A resposta correta é a $\boxed{\text{C}}$. De facto, fazendo $z = x + yi$, vem:

$$|\bar{z} - 2 + i| = |z - i| \Leftrightarrow |x - yi - 2 + i| = |x + yi - i| \Leftrightarrow |x - 2 + i(1 - y)| = |x + i(y - 1)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2 + (1-y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \cancel{(1-y)^2} = x^2 + \cancel{(y-1)^2} \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 = \cancel{x^2}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

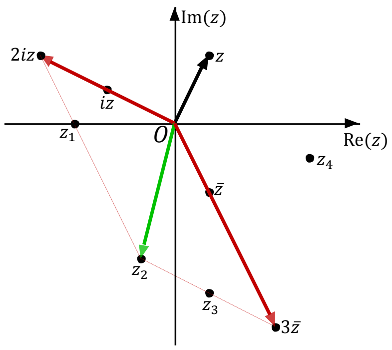
Portanto, a condição $|\bar{z} - 2 + i| = |z - i|$ representa a reta vertical (paralela ao eixo imaginário) que contém o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

Resposta: C

8. Tem-se que $i^{-41} = i^{4\times(-11)+3} = i^3 = -i$. Assim:

$$\frac{2z}{i^{-41}} + 3\bar{z} = \frac{2z}{-i} + 3\bar{z} = \frac{2z}{-i} \times \frac{i}{i} + 3\bar{z} = \frac{2zi}{-i^2} + 3\bar{z} = \frac{2zi}{1} + 3\bar{z} = 2zi + 3\bar{z}$$

Vamos utilizar a regra do paralelogramo para resolver este problema:



Logo, $\frac{2z}{i^{-41}} + 3\bar{z} = 2zi + 3\bar{z} = z_2$

Resposta: B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1.

▪ $z_1 = (-3+i)i = -3i + i^2 = -1 - 3i$, assim:

$$(z_1)^3 = (-1-3i)^3 = (-1-3i)^2 \times (-1-3i) = (1+6i+9i^2)(-1-3i) = (-8+6i)(-1-3i) =$$

$$= 8 + 24i - 6i - 18i^2 = 26 + 18i$$

▪ $z_2 = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1^2-i^2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$. Logo, $\overline{z_2} = 2 - i$

Portanto:

$$z^4 + (z_1)^3 - \overline{z_2} = 19i - 57 \Leftrightarrow z^4 + 26 + 18i - 2 + i = 19i - 57 \Leftrightarrow z^4 + 24 + \cancel{19i} = \cancel{19i} - 57 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4 = -81 \Leftrightarrow z^4 = 81\text{cis}\pi \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{81\text{cis}\pi}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{81}\text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), k \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow z = 3\text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), k \in \{0,1,2,3\}$$

Para $k = 0$ vem $z = 3\text{cis}\frac{\pi}{4} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Para $k = 1$ vem $z = 3\text{cis}\frac{3}{4}\pi = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

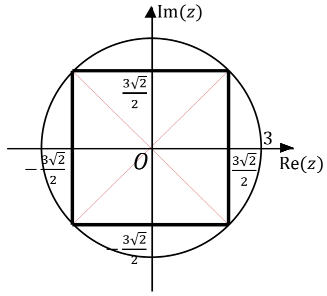
Para $k = 2$ vem $z = 3\text{cis}\frac{5}{4}\pi = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Para $k = 3$ vem $z = 3\text{cis}\frac{7}{4}\pi = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

O conjunto solução da equação $z^4 + (z_1)^3 - \overline{z_2} = 19i - 57$ é:

$$\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right\}$$

Representando o quadrando cujos vértices são as soluções da equação:



A medida do lado do quadrado é igual a $2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, logo a sua área é igual a $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$.

1.2. Tem-se $\frac{w^3 \times z_2}{z_1} = \frac{(\text{cis}\alpha)^3 \times \frac{1+3i}{1+i}}{-1-3i} = \frac{\text{cis}(3\alpha)\times(1+3i)}{-(1+3i)(1+i)} = \frac{\text{cis}(3\alpha)}{-1-i} \underset{\text{i)}}{=} \frac{\text{cis}(3\alpha)}{\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{cis}\left(3\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)$

i) Cálculo auxiliar: Para escrever $-1-i$ na forma trigonométrica, vem: $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-1-i$, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{-1} = 1$ e $\theta \in 3.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Assim, $-1-i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$.

A imagem geométrica de $\frac{w^3 \times z_2}{z_1}$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares se o seu argumento for da forma $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$3\alpha - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ $(k = 4)$.

2. Seja $w = \rho\text{cis}\theta$. Se w e $\overline{-w}$ são raízes de índice n de um número complexo z, então $z = w^n$ e $z = (\overline{-w})^n$ e portanto $w^n = (\overline{-w})^n$.

Como

$$w^n = \rho^n\text{cis}(n\theta) \quad \text{e} \quad (\overline{-w})^n = (\overline{-\rho\text{cis}\theta})^n = \left(\overline{\rho\text{cis}(\theta+\pi)}\right)^n = \left(\rho\text{cis}(-\theta-\pi)\right)^n = \rho^n\text{cis}(-n\theta - n\pi),$$

vem:

$$w^n = (\overline{-w})^n \Leftrightarrow \rho^n\text{cis}(n\theta) = \rho^n\text{cis}(-n\theta - n\pi) \Leftrightarrow \text{cis}(n\theta) = \text{cis}(-n\theta - n\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\theta = -n\theta - n\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n\theta = -n\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n\theta = -\frac{n\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\theta = -\frac{n\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $z = w^n = \rho^n \text{cis}(n\theta) = \rho^n \text{cis}\left(-\frac{n\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. Como n é um número natural ímpar, então $n = 2p - 1, p \in \text{IN}$ e portanto o argumento de z é da forma:

$$-\frac{(2p-1)\pi}{2} + k\pi = -\frac{2p\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} - p\pi + k\pi = \frac{\pi}{2} + (k-p)\pi, p \in \text{IN e } k \in \mathbb{Z}$$

(Como $p \in \text{IN}$ e $k \in \mathbb{Z}$, obviamente que $k - p \in \mathbb{Z}$)

Conclui-se então que a imagem geométrica de z pertence ao eixo imaginário, ou seja, z é um imaginário puro.

3.

3.1. Considere-se os acontecimentos T: «o automóvel escolhido tem matrícula portuguesa» e $B/C/D$: «o automóvel escolhido é um(a) «berlina» / carrinha / desportivo». Do enunciado tem-se que:

$P(T) = 80\% = 0{,}8$; $P(B|T) = 64\% = 0{,}64$; $P(C|T) = 31\% = 0{,}31$; $P(D \cap \overline{T}) = 3\% = 0{,}03$ e $P(B) = 2P(C)$

Assim:

▪ $P(B|T) = 0{,}64 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = 0{,}64 \Leftrightarrow P(B \cap T) = 0{,}64 \times 0{,}8 = 0{,}512$

▪ $P(C|T) = 0{,}31 \Leftrightarrow \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = 0{,}31 \Leftrightarrow P(C \cap T) = 0{,}31 \times 0{,}8 = 0{,}248$

Colocando estes valores numa tabela de dupla entrada, vem:

	B	C	D	p.m.
T	$0{,}512$	$0{,}248$	$0{,}04$	$0{,}8$
$\overline{T}$			$0{,}03$	$0{,}2$
p.m.			$0{,}07$	1

Justificações:

▪ $P(D \cap T) = 0{,}8 - 0{,}512 - 0{,}248 = 0{,}04$

▪ $P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \overline{T}) = 0{,}04 + 0{,}03 = 0{,}07$

Tem-se $P(B)+P(C)+P(D)=1$, como $P(B)=2P(C)$, vem:

$$2P(C)+P(C)+0{,}07=1 \Leftrightarrow 3P(C)=0{,}93 \Leftrightarrow P(C)=0{,}31$$

Portanto, $P(B)=2\times 0{,}31=0{,}62$. Terminando o preenchimento da tabela:

	B	C	D	p.m.
T	$0{,}512$	$0{,}248$	$0{,}04$	$0{,}8$
$\overline{T}$	$0{,}108$	$0{,}062$	$0{,}03$	$0{,}2$
p.m.	$0{,}62$	$0{,}31$	$0{,}07$	1

Justificações:

- $P(B\cap\overline{T})=0{,}62-0{,}512=0{,}108$
- $P(C\cap\overline{T})=0{,}31-0{,}248=0{,}062$

Logo, $P(\overline{T}|B)=\frac{P(\overline{T}\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}108}{0{,}62}\approx 0{,}17$.

3.2. Considere-se a variável aleatória X: «número de habitantes com olhos azuis presentes na festa em n». A variável aleatória X segue uma distribuição binomial de parâmetros n e $p=0{,}08$, isto é, $X\sim\mathrm{Bin}(n;0{,}08)$. Pretende-se determinar n de modo que a probabilidade de pelo menos um dos presentes na festa ter olhos azuis seja de $0{,}95$, isto é, $P(X\geq 1)=0{,}95$. Assim:

$$P(X\geq 1)=0{,}95 \Leftrightarrow 1-P(X=0)=0{,}95 \Leftrightarrow -P(X=0)=-0{,}05 \Leftrightarrow P(X=0)=0{,}05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{n}C_0\times(0{,}08)^0\times(0{,}92)^n=0{,}05 \Leftrightarrow (0{,}92)^n=0{,}05$$

$$\Leftrightarrow n=\log_{0{,}92}(0{,}05) \Leftrightarrow n=\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}92)}\approx 36$$

Logo, $n\approx 36$, ou seja, para que a probabilidade de pelo menos um dos presentes ter olhos azuis ser de $0{,}95$, têm de estar na festa 36 habitantes da localidade.

4. Considere-se a variável aleatória Y: «produto dos números inscritos nas cinco bolas extraídas». O produto das cinco bolas extraídas pode ser:

- -12, se entre as cinco bolas extraídas não existirem bolas numeradas com o número 0;
- 0, se pelo menos uma das cinco bolas extraídas estiver numerada com o número 0.

Assim, $Y=\{-12,0\}$ e portanto tem-se $P(Y=-12)=\frac{{}^{5}C_5}{{}^{7}C_5}=\frac{1}{21}$ e $P(Y=0)=\frac{{}^{2}C_1\times{}^{5}C_4+{}^{2}C_2\times{}^{5}C_3}{{}^{7}C_5}=\frac{20}{21}$.

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é dada por:

y_i	-12	0
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{20}{21}$

O valor médio da variável aleatória Y é dado por $\mu = -12 \times \frac{1}{21} + 0 \times \frac{20}{21} = -\frac{4}{7}$, ou seja, em cada realização da experiência o "produto médio" (ou "produto esperado") é de $-\frac{4}{7}$, portanto em $14\ 000$ realizações desta experiência é de esperar que a soma dos produtos obtidos esteja próxima de $-\frac{4}{7} \times 14000 = -8000$.

5.

5.1.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 \ln(x^2+4) - x^2\ln(x^2)) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2\ln(x^2+4)) - \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2\ln(x^2)) =$

$$= \overbrace{0 \times \ln 4}^{0} - \lim_{x\to 0^-} (x^2\ln(x^2)) = -\lim_{x\to 0^-} (x^2\ln(x^2)) \underset{\text{i)}}{\overset{(0\times\infty)}{=}} -\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

$$\underset{\text{ii)}}{=} -\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{-\ln y}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

i) Mudança de variável: Se $x \to 0^-$ então $x^2 \to 0^+$ e portanto $\frac{1}{x^2} \to +\infty$. Seja $y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}$, $y \to +\infty$.

ii) $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln 1 - \ln y = 0 - \ln y = -\ln y$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-x^3 e^{\frac{1}{x}}\right) \underset{\text{iii)}}{\overset{(0\times\infty)}{=}} \lim_{y\to+\infty} \left(-\left(\frac{1}{y}\right)^3 e^y\right) = -\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y^3} \times e^y\right) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^3} = -\infty$$

iii) Mudança de variável: Se $x \to 0^+$ então $\frac{1}{x} \to +\infty$. Seja $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $y \to +\infty$.

Logo, como $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

- Assíntotas verticais

Tem-se que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, logo a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de g. Como a função g é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$, então o gráfico de g não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2\ln(x^2+4) - x^2\ln(x^2))}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(\ln(x^2+4) - \ln(x^2))}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(\ln(x^2+4) - \ln(x^2)) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty} x\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\underset{\text{i)}}{=} \lim_{y\to0^-} \left(\frac{1}{y}\times\ln(1+4y^2)\right) = \lim_{y\to0^-} \frac{\ln(1+4y^2)}{y} = \lim_{y\to0^-} \left(\frac{\ln(1+4y^2)}{4y^2}\times 4y\right)$$

$$= \lim_{y\to0^-} \frac{\ln(1+4y^2)}{4y^2} \times \lim_{y\to0^-} (4y) = 1\times4\times0 = 0$$

Se $y \to 0^-$ então $4y^2 \to 0^+$

i) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $\frac{1}{x} \to 0^-$. Seja $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $y \to 0^-$. Portanto $\frac{4}{x^2} = 4\times\frac{1}{x^2} = 4\times\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4y^2$.

$$b = \lim_{x\to-\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}(x^2\ln(x^2+4) - x^2\ln(x^2)) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty} x^2(\ln(x^2+4) - \ln(x^2)) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^2\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2} = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2}\right) = \ln(e^4) = 4$$

Se $x \to -\infty$ então $x^2 \to +\infty$

Outra resolução para o cálculo de $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x) - mx)$:

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} x^2\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) \underset{\text{ii)}}{=} \lim_{y\to0^+}\left(\frac{1}{y}\times\ln(1+4y)\right) =$$

$$= \lim_{y\to0^+}\left(\frac{1}{y}\times\ln(1+4y)\right) = \lim_{y\to0^+}\frac{\ln(1+4y)}{y} = 4\times\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(1+4y)}{4y} = 4\times1 = 4$$

ii) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $\frac{1}{x^2} \to 0^+$. Seja $y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}$, $y \to 0^+$.

A reta de equação $y = 4$ é assintota horizontal do gráfico de g, quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3e^{\frac{1}{x}}}{x} = -\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right) = -(+\infty)^2\times e^{\frac{1}{+\infty}} = -\infty\times e^0 = -\infty\times1 = -\infty$$

Quando $x \longrightarrow +\infty$ o gráfico de g não tem assíntotas.

5.2. Para $x < 0$ tem-se $g(x) = x^2(\ln(x^2+4) - \ln(x^2))$, assim:

$$g'(x) = 2x(\ln(x^2+4) - \ln(x^2)) + x^2\left(\frac{2x}{x^2+4} - \frac{2x}{x^2}\right) = 2x(\ln(x^2+4) - \ln(x^2)) + x^2\left(\frac{2x}{x^2+4} - \frac{2}{x}\right)$$

Portanto, $h'(1) = g'(-2) = -4(\ln 8 - \ln 4) + 4\left(\frac{-4}{8} - \frac{2}{-2}\right) = -4\ln\left(\frac{8}{4}\right) + 2 = 2 - 4\ln 2$.

Tem-se:

$$\lim_{x\to1}\frac{2h(1)-2h(x)}{x^2+2x-3} \underset{\text{i)}}{=} \lim_{x\to1}\frac{-2(h(x)-h(1))}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to1}\left(\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\times\frac{-2}{x+3}\right) = \lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{-2}{x+3} = h'(1)\times\frac{-2}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\times g'(-2) = -\frac{1}{2}\times(2-4\ln 2) = 2\ln 2 - 1 = \ln(2^2) - \ln \mathrm{e} = \ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$$

i) Cálculo auxiliar: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \ \lor \ x = 1$, logo $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.

6

6.1. Tem-se, $g(x) = \mathrm{e}^{-(x-1)^2} + \mathrm{e}^{(x-1)^2-2} + 2$. Assim:

- $g'(x) = -2(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2} + 2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2-2} = 2(x-1)\left(\mathrm{e}^{(x-1)^2-2} - \mathrm{e}^{-(x-1)^2}\right)$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(\mathrm{e}^{(x-1)^2-2} - \mathrm{e}^{-(x-1)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \ \lor \ \mathrm{e}^{(x-1)^2-2} - \mathrm{e}^{-(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \lor \ \mathrm{e}^{(x-1)^2-2} = \mathrm{e}^{-(x-1)^2} \Leftrightarrow x = 1 \ \lor \ (x-1)^2 - 2 = -(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \lor \ 2(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \ \lor \ (x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \lor \ x - 1 = -1 \ \lor \ x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ \lor \ x = 0 \ \lor \ x = 2$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f', vem:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$2(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{e}^{(x-1)^2-2} - \mathrm{e}^{-(x-1)^2}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	min.	↗	máx.	↘	min.	↗

g é decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[1, 2]$, é crescente em $[0, 1]$ e em $[2, +\infty[$, tem mínimo relativo em $x = 0$ e em $x = 2$ e tem máximo relativo em $x = 1$.

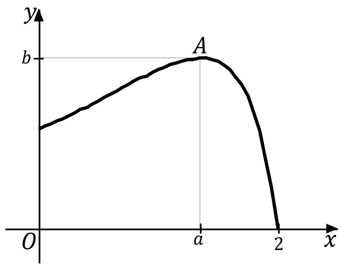
6.2. A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times h$, onde h é a medida da altura do trapézio, pelo que $h = f(2) - f(x)$. Assim, como:

$$f(2) - f(x) = \left(\mathrm{e}^{-2^2} + \mathrm{e}^{2^2-2}\right) - \left(\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{x^2-2}\right) = \mathrm{e}^{-4} + \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{x^2-2},$$

vem:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times h = \frac{4+2x}{2}\times h = (2+x)\left(\mathrm{e}^{-4} + \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{x^2-2}\right)$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se a função $y_1 = (2+x)\left(\mathrm{e}^{-4} + \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{x^2-2}\right)$ na janela de visualização $[0,2]\times[0,25]$.



Logo, as coordenadas do ponto A são (a,b), com $a \approx 1{,}36$ e $b \approx 21{,}47$ (a área do trapézio é máxima em $x = a$).

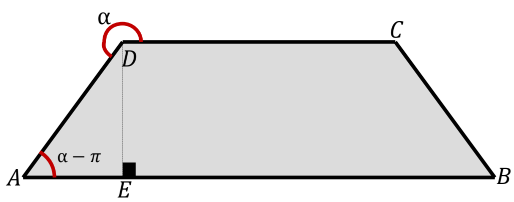
7.

7.1. O perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado por $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \underset{\overline{BC}=\overline{DA}}{=} \overline{AB} + 2\overline{AD} + \overline{CD}$.

Seja $\theta = D\hat{A}B = A\hat{B}C$. Tem-se que $A\hat{D}C = 2\pi - \alpha$ (ângulo interno) e também $B\hat{C}D = 2\pi - \alpha$, assim:

$$\theta + \theta + 2\pi - \alpha + \cancel{2\pi} - \alpha = \cancel{2\pi} \Leftrightarrow 2\theta - 2\alpha = -2\pi \Leftrightarrow 2\theta = 2\alpha - 2\pi \Leftrightarrow \theta = \alpha - \pi$$

Assim:



- $\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{k}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{k}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)} \underset{\text{i)}}{\Leftrightarrow} \overline{AE} = \frac{k}{\operatorname{tg}\alpha}$

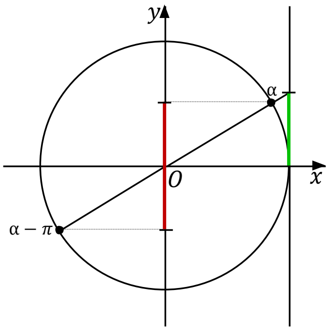
- $\operatorname{sen}(\alpha - \pi) = \frac{k}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{k}{\operatorname{sen}(\alpha-\pi)} \underset{\text{i)}}{\Leftrightarrow} \overline{AD} = -\frac{k}{\operatorname{sen}\alpha}$

Logo, como $\overline{DE} = k$, vem $\overline{CD} = 2\overline{DE} = 2k$ e $\overline{AB} = \overline{CD} + 2\overline{AE} = 2k + \frac{2k}{\operatorname{tg}\alpha}$. Portanto:

$$P_{[ABCD]} = \overline{AB} + 2\overline{AD} + \overline{CD} = 2k + \frac{2k}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{2k}{\operatorname{sen}\alpha} + 2k = 2k\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + 1\right) =$$

$$= 2k\left(2 + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 2k\left(2 + \frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = p(\alpha)$$

i) Figura auxiliar:



$\text{tg}(\alpha - \pi) = \text{tg}\alpha$

$\text{sen}(\alpha - \pi) = -\text{sen}\alpha$

7.2. A função p é contínua em $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, pois é quociente e soma entre funções contínuas. Logo, a função $p(\alpha)$ também é contínua em $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right] \subset \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Tem-se:

▪ $p\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2k\left(2 + \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1}{\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)}\right) = 2k\left(2 + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2}}\right) = 2k\left(2 + \frac{\frac{\sqrt{3}+2}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right) = 2k\left(2 + \sqrt{3} + 2\right) = 2k\left(4 + \sqrt{3}\right)$

Como $1 < \sqrt{3} < 2$, vem $5 < 4 + \sqrt{3} < 6 \underset{k>0}{\Leftrightarrow} 10k < 2k\left(4 + \sqrt{3}\right) < 12k$ e portanto $p\left(\frac{7}{6}\pi\right) > 9k$.

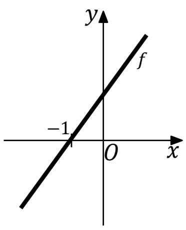
▪ $p\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2k\left(2 + \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1}{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}\right) = 2k\left(2 + \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 2k\left(2 + \frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}\right) = 2k\left(2 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = 2k\left(2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) =$

$= 2k\left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 2k\left(2 + \sqrt{3}\right)$

Como $1 < \sqrt{3} < 2$, vem $3 < 2 + \sqrt{3} < 4 \underset{k>0}{\Leftrightarrow} 6k < 2k\left(2 + \sqrt{3}\right) < 8k$ e portanto $p\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 9k$.

Assim, como $p\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 9k < p\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, pelo teorema de Bolzano existe pelo menos um $\theta \in \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right[$ tal que $p(\theta) = 9k$.

8. A função f é afim, portanto é da forma $f(x) = mx + b$. Além disso, a função f é crescente (portanto $m > 0$) pois o seu gráfico interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e o eixo Oy num ponto de ordenada positiva, como evidenciado na figura.



Assim:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2 - x} \times f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{x^2 - x} = 0}_{\text{eq. impossível em IR}} \vee f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g', vem:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
i) $g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	min.	↗

i) Observa que o sinal de g' depende apenas do sinal de $f(x)$, pois $\mathrm{e}^{x^2-x} > 0, \forall\, x \in \mathrm{IR}$.

Conclui-se então que a função g tem um mínimo absoluto em $x = -1$, portanto $g(x) > g(-1)$, $\forall\, x \in \mathrm{IR}\backslash\{-1\}$. Logo, a afirmação $\boxed{\text{A}}$ é verdadeira, não sendo esta a opção correta.

Da análise do quadro também se conclui que a função g é decrescente em $]-\infty, -1]$, isto é:

$$\forall\, x_1, x_2 \in\,]-\infty, -1]: x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Assim, como $a - 2 < a$ e $a - 1 < a$, vem $g(a-2) > g(a)$ e $g(a-1) > g(a)$, para todo o $a \in\,]-\infty, -1]$ (se a pertence ao intervalo $]-\infty, -1]$ então $a - 2$ e $a - 1$ também pertencem a esse intervalo). Logo:

$$g(a-2) + g(a-1) > g(a) + g(a) \Leftrightarrow g(a-2) + g(a-1) > 2g(a), \forall a \in\,]-\infty, -1]$$

Logo, a afirmação $\boxed{\text{C}}$ é verdadeira e portanto esta também não é a opção correta.

Por outro lado, como o ponto de coordenadas $(-1, 0)$ pertence ao gráfico de f, vem $0 = -m + b \Leftrightarrow b = m$, pelo que $f(x) = mx + m$, $m > 0$. Assim tem-se:

- $$g''(x) = \left(\mathrm{e}^{x^2-x} \times f(x)\right)' = \left(\mathrm{e}^{x^2-x}\right)' \times f(x) + \mathrm{e}^{x^2-x} \times f'(x) =$$

$$= (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x} \times (mx+m) + m\mathrm{e}^{x^2-x} = m(2x-1)(x+1)\mathrm{e}^{x^2-x} + m\mathrm{e}^{x^2-x}$$

$$= m\mathrm{e}^{x^2-x} \times \left((2x-1)(x+1)+1\right) = m\mathrm{e}^{x^2-x} \times (2x^2+x)$$

- $$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{m\mathrm{e}^{x^2-x} = 0}_{\text{eq. impossível em IR}} \ \vee\ 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x = -\frac{1}{2}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

i) Observa que o sinal de g'' depende apenas do sinal de $2x^2+x$, pois $me^{x^2-x}>0, \forall\, x \in \mathrm{IR}$ e $m>0$.

Logo, a afirmação $\boxed{\text{D}}$ não é a correta pois é verdade que o gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $[0,+\infty[$.

A opção correta é a $\boxed{\text{B}}$ (o gráfico da função g não tem ponto de inflexão em $x=-1$, portanto esta afirmação não é verdadeira).