PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME–TIPO 2

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Nota: Na versão de 2014, no enunciado, onde está "entre a $5.^{\text{a}}$ e a n-ésima linhas, inclusive" deve estar "entre a linha 5 e a linha n, inclusive".

Seja (s_n) a sucessão que dá a soma dos elementos da linha n do triângulo de Pascal, com $n \in \mathbb{N}_0$. Sabemos que $s_n = 2^n$ e portanto (s_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2$. Logo a soma de todos os elementos de todas as linhas do triângulo de Pascal entre a $5.^{\text{a}}$ linha (corresponde ao sexto termo da sucessão) e a n-ésima linha (corresponde ao termo $n+1$ da sucessão) inclusive, é dada por:

$$S_{n+1} - S_5 = s_0 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} - s_0 \times \frac{1-r^5}{1-r} = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 2^{n+1} - 1 - 21 = 2^{n+1} - 32.$$

Logo $2^{n+1} - 32 = 4064 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 4096 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 2^{12} \Leftrightarrow n+1 = 12$. Assim, a linha $n+1$ é a linha 12 e a soma dos seus cinco últimos elementos é ${}^{12}C_{12} + {}^{12}C_{11} + {}^{12}C_{10} + {}^{12}C_9 + {}^{12}C_8 = 794$.

Resposta: B

Nota: A soma dos p últimos elementos de uma linha n do triângulo de Pascal, com $n \geq p$, é igual à soma dos p primeiros elementos dessa linha, pois ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}, \forall\, n \geq p$.

2. Tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{11}{15} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

Assim $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{15}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{9}$.

Resposta: B

3.

▪ Tem-se:

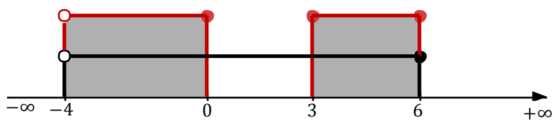
$$(g \circ f)(x) = 2 \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) = 2 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < 3 \Leftrightarrow \underbrace{|x| \geq 0}_{\text{Condição Universal}} \quad \wedge \quad |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Portanto a afirmação $(g \circ f)(x) = 2, \forall x \in]-3,3[$ é verdadeira.

- $D_{g\circ h} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_h \quad \wedge \quad h(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \,]-4{,}6[\quad \wedge \quad h(x) \in \,]-\infty, 3]\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \,]-4{,}6[\quad \wedge \quad h(x) \leq 3\} = \left\{x \in \mathbb{R}: \underbrace{x \in \,]-4{,}6[}_{-4<x\leq 6} \quad \wedge \quad \underbrace{x \in \,]-4{,}0] \cup [3{,}6]}_{-4<x\leq 6 \;\vee\; 3\leq x\leq 6}\right\} =$$

$$= \,]-4{,}0] \cup [3{,}6]$$



Portanto a afirmação $D_{g\circ h} = \,]-4{,}0] \cup [3{,}6]$ é verdadeira.

- Como $h(x) > 3$, $\forall x \in \,]0{,}3[$, então $h(2) > 3$. Assim, $(h \circ g)(2) = h\big(g(2)\big) = h(2)$ e $h(2) > 3$. Portanto a afirmação $(h \circ g)(2) < 3$ é falsa.

- Tem-se $(g \circ h)(0) = g\big(h(0)\big) = g(3)$. Como $3 \notin D_g$, então $(g \circ h)(0)$ não existe e portanto esta afirmação é verdadeira.

Resposta: C

4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+e^{x}}{f(|x|)} \underset{i)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+e^{x}}{f(-x)} \underset{ii)}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}+e^{-y}}{f(y)} = \frac{e^{+\infty}+e^{-\infty}}{0^-} = \frac{+\infty+0}{0^-} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$

i) Como $x \to -\infty$ pode assumir-se que x é negativo, logo $|x| = -x$.

ii) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $-x \to +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \to +\infty$.

Resposta: B

5. Fazendo um quadro de variação da monotonia da função f, vem:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	máx.	$\rightarrow$	min.	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	n.d.	0	0	$+$

A função f' é positiva em $]-\infty, -2[$ e em $]0, +\infty[$ e é nula em $]-2{,}0]$. Observa ainda que $f'(-2)$ não existe, pois o ponto de abcissa -2 é anguloso. Das opções apresentadas a única que está de acordo com a tabela é a $\boxed{\text{A}}$.

Nota: Apesar de não ser necessário para a resolução deste exercício é de notar que a função f, para valores de x inferiores a -2, é uma função afim e portanto da forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathrm{IR}^+$, pelo que, para valores de x inferiores a -2, $f'(x) = a$.

Resposta: A

6. Seja O o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ e portanto a amplitude do ângulo $A\hat{C}O$ é $\frac{x}{2}$. Tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\overline{AO}}{2}\Leftrightarrow \overline{AO}=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ e } \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\overline{CO}}{2}\Leftrightarrow \overline{CO}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim:

$$V_{\text{cone}}=\frac{A_{\text{base}}\times\overline{CO}}{3}=\frac{\pi\times\overline{AO}^2\times\overline{CO}}{3}=\frac{\pi\times\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\times 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3}=\frac{8\pi\times\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3}=\frac{4\pi\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\times 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3}=$$

$$=\frac{4\pi\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\times\operatorname{sen}\left(2\times\frac{x}{2}\right)}{3}=\frac{4\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\times\operatorname{sen}x$$

Resposta: C

7. Seja z um número complexo não nulo da forma $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

Sabemos que $z\times\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$. Assim:

$$\frac{2\bar{z}}{zi}=\frac{2}{i}\times\frac{\bar{z}}{z}=\frac{2}{i}\times\frac{-i}{-i}\times\frac{\bar{z}}{z}\times\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{-2i}{-i^2}\times\frac{(\bar{z})^2}{z\times\bar{z}}=-2i\times\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=-2i\times\frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2}=\frac{-2a^2i+4abi^2+2b^2i}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{-4ab+(2b^2-2a^2)i}{a^2+b^2}=-\frac{4ab}{a^2+b^2}+\frac{2b^2-2a^2}{a^2+b^2}i$$

Logo, $\operatorname{Re}\left(\frac{2\bar{z}}{zi}\right)=-\frac{4ab}{a^2+b^2}$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z}}{zi}\right)=\frac{2b^2-2a^2}{a^2+b^2}$. Portanto:

$$\left(\operatorname{Re}\left(\frac{2\bar{z}}{zi}\right)\right)^2+\left(\operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z}}{zi}\right)\right)^2=\left(-\frac{4ab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{2b^2-2a^2}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{16a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{4b^2-8a^2b^2+4a^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{4b^4+8a^2b^2+4a^4}{(a^2+b^2)^2}=$$

$$=\frac{4\cancel{(b^4+2a^2b^2+a^4)}}{\cancel{a^4+2a^2b^2+b^4}}=4$$

Outra resolução: Seja $z=\rho\operatorname{cis}\theta$. Tem-se:

$$\frac{2\bar{z}}{zi}=\frac{2\rho\operatorname{cis}(-\theta)}{\rho\operatorname{cis}\theta\times\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=\frac{2\operatorname{cis}(-\theta)}{\operatorname{cis}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=2\operatorname{cis}\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+2i\operatorname{sen}\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

Logo, $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{2\bar{z}}{zi}\right)\right)^2+\left(\operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z}}{zi}\right)\right)^2=4\cos^2\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+4\operatorname{sen}^2\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=$

$$=4\left(\cos^2\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(-2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4\times 1=4$$

Resposta: D

8. O raio da circunferência é igual a $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Assim o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $5\text{cis}\frac{\pi}{2}$ e portanto o ponto B é a imagem geométrica do número complexo $5\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + 4 \times \frac{2\pi}{9}\right) = 5\text{cis}\frac{25\pi}{18}$ (o eneágono divide a circunferência em nove arcos de circunferência de amplitude $\frac{2\pi}{9}$, os seus vértices são as imagens geométricas das raízes de índice nove de um mesmo número complexo).

Resposta: A

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Tem-se $z_2 = 3 + \sqrt{3}i \underset{i)}{=} 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{6}$, logo:

$$\left(\frac{-\text{cis}\frac{\pi}{4}\times z_2}{\overline{z_1}}\right)^n = \left(\frac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\times 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{6}}{2\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}{2\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}\right)^n = \left(\sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)^n = \left(\sqrt{3}\text{cis}\frac{11\pi}{6}\right)^n =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^n \text{cis}\left(\frac{11n\pi}{6}\right)$$

$\left(\frac{-\text{cis}\frac{\pi}{4}\times z_2}{\overline{z_1}}\right)^n$ é um número real se o seu argumento for da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$\frac{11n\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11n}{6} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $n = 6\ (k = 11)$.

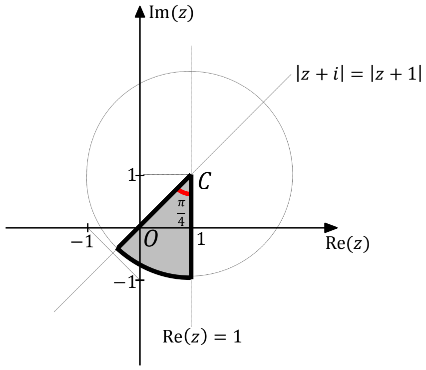
i) Cálculo auxiliar: Para escrever $3+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica, vem: $|3+\sqrt{3}i| = \sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$. Sendo θ um argumento de $3+\sqrt{3}i$, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 1.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Assim $3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{6}$.

1.2.

- $|z+i| \leq |z+1| \Leftrightarrow |z-(-i)| \leq |z-(-1)|$
- $|z-1-i| \leq |z_1| \Leftrightarrow |z-(1+i)| \leq 2$
- $\text{Re}(z) \leq \text{Re}(z_2 - 2) \Leftrightarrow \text{Re}(z) \leq \text{Re}\left(3+\sqrt{3}i-2\right) \Leftrightarrow \text{Re}(z) \leq \text{Re}\left(1+\sqrt{3}i\right) \Leftrightarrow \text{Re}(z) \leq 1$

Na figura o ponto C é a imagem geométrica do número complexo $1 + i$.

$$A_{\text{colorida}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \times 2^2 = \frac{\pi}{8} \times 4 = \frac{\pi}{2}$$



2.

2.1. Na fila da frente os doze elementos da seleção podem sentar-se de $4!$ maneiras distintas. Nos quatro lugares centrais o treinador e os três guarda-redes permutam de $4!$ formas distintas. Os restantes oito elementos (os defesas) ocuparam os oito lugares apenas de uma maneira, porque se sentam por ordem crescente de numeração nas camisolas. Na fila de trás pretende-se que os sete médios fiquem juntos, assim, agrupando-os num bloco, o bloco e os restantes cinco elementos da seleção permutam entre si de $6!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, os sete elementos do bloco permutam entre si de $7!$ formas distintas. Assim, na fila de trás os doze elementos podem sentar-se de $6! \times 7!$ maneiras distintas. Portanto os 24 elementos da seleção podem, nas condições pretendidas, tirar a foto de $4! \times 6! \times 7! = 87\ 091\ 200$ maneiras distintas.

2.2. A variável aleatória X segue uma distribuição binomial de parâmetros $n = 3$ e $p = \frac{{}^5C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{1}{19}$ (probabilidade de em cada dia escolher dois avançados para a conferência de imprensa), isto é, $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{19}\right)$

A variável aleatória X toma os valores 0, 1, 2 ou 3, ou seja, $X = \{0, 1, 2,3\}$. Assim:

$$P(X = 0) = {}^3C_0 \times \left(\frac{1}{19}\right)^0 \times \left(\frac{18}{19}\right)^3 = \frac{18^3}{19^3}, \qquad P(X = 1) = {}^3C_1 \times \left(\frac{1}{19}\right)^1 \times \left(\frac{18}{19}\right)^2 = \frac{3\times18^2}{19^3}$$

$$P(X = 2) = {}^3C_2 \times \left(\frac{1}{19}\right)^2 \times \left(\frac{18}{19}\right)^1 = \frac{3\times18}{19^3}, \qquad P(X = 3) = {}^3C_3 \times \left(\frac{1}{19}\right)^3 \times \left(\frac{18}{19}\right)^0 = \frac{1}{19^3}$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{18^3}{19^3}$	$\frac{3\times18^2}{19^3}$	$\frac{3\times18}{19^3}$	$\frac{1}{19^3}$

3. O número de casos possíveis é ${}^{26}C_4$ (número de maneiras de escolher quatro pessoas entre 26). Para o número de casos favoráveis tem que se considerar três casos:

- o grupo é constituído por um rapaz e três raparigas. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{13}C_1 \times {}^{13}C_3 = 13 \times {}^{13}C_3$;

- o grupo é constituído por dois rapazes e duas raparigas. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2 = ({}^{13}C_2)^2$;

- o grupo é constituído por três rapazes e uma rapariga. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1 = 13 \times {}^{13}C_3$.

Portanto o número de casos favoráveis é $({}^{13}C_2)^2 + 2 \times 13 \times {}^{13}C_3$. Pela lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer um dos alunos tem igual probabilidade de ser escolhido, a lei de Laplace pode ser aplicada a este problema. Assim, uma resposta possível a este problema é $\frac{({}^{13}C_2)^2 + 2\times 13 \times {}^{13}C_3}{{}^{26}C_4}$.

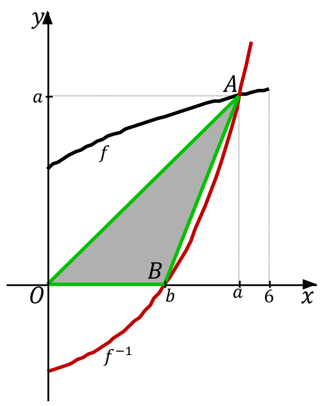
4.

- A função f é injetiva, portanto tem inversa. Determinado a expressão analítica da função inversa de f, vem:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 + 2\ln(x+3) \Leftrightarrow \ln(x+3) = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x + 3 = e^{\frac{y-1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y-1}{2}} - 3$$

Assim, sendo f^{-1} a função inversa de f tem-se $D_{f^{-1}} = \mathrm{IR}$ e $f^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}} - 3$.

- Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f(x)$ e $y_2 = f^{-1}(x)$ na janela de visualização $[0, 6] \times [-3, 7]$.



As coordenadas do ponto A são (a, a), com $a \approx 5{,}21$ e as coordenadas do ponto B são $(b, 0)$, com $b \approx 3{,}2$. Assim:

$$A_{[AOB]} = \frac{b \times a}{2} \approx 8$$

5. Vamos começar por calcular o domínio de $\log_2(x+3) \geq \log_2(6-2x) - \log_2 x$.

$$D = \{x \in \mathrm{IR}: x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\} = \{x \in \mathrm{IR}: x>-3 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\} =]0,3[$$

Neste domínio tem-se:

$$\log_2(x+3) \geq \log_2(6-2x) - \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2 x \geq \log_2(6-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x(x+3)) \geq \log_2(6-2x)$$

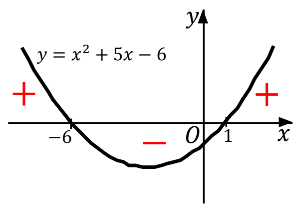
$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+3x) \geq \log_2(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x \geq 6-2x \Leftrightarrow x^2+5x-6 \geq 0$$

Portanto, C.S.$= [1,3[$.

Cálculo auxiliar:

$x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x=-6 \ \vee \ x=1$



$x^2+5x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-6] \cup [1,+\infty[$

6.

6.1. Como a função g é contínua à direita do ponto 0, então $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+1}\right) = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$

- $g(0) = a^2 - a$

Portanto, $a^2 - a = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \ \vee \ a = 2$. Como $a > 0$, vem $a = 2$.

- Assíntotas verticais:

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2\ln(-x)) = 0 + 2\ln(0^+) = 2 \times (-\infty) = -\infty$. Logo a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função g. Como a função g é contínua em $IR\backslash\{0\}$, então o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas não verticais:

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2\ln(-x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2\ln(-x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x + \frac{2\ln(-x)}{x}\right) \underset{i)}{=} \lim_{y\to+\infty} \left(-y - 2\frac{\ln y}{y}\right) =$$

$$= -\infty - 2\times 0 = -\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite notável)

i) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $-x \to +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \to +\infty$.

Logo, quando $x \to -\infty$, o gráfico de g não tem assíntotas não verticais.

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+9-x-1}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{8}{+\infty\left(\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}\right)} = \frac{8}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+9-x-1}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}} = \frac{8}{+\infty} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de g, quando $x \to +\infty$.

6.2. Para $x \in \left]-\infty, 0\right[$, tem-se:

▪ $g'(x) = 2x + 2 \times \frac{-1}{-x} = 2x + \frac{2}{x}$; $g''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2-2}{x^2}$

▪ $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \;\wedge\; x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \;\wedge\; x \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \;\vee\; x = 1) \;\wedge\; x \neq 0$$

Como $x \in \left]-\infty, 0\right[$, tem-se $x = -1$.

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$		-1		0
$2x^2-2$		$+$	0	$-$	n.d.
x^2		$+$	$+$	$+$	n.d.
$g''(x)$		$+$	0	$-$	n.d.
$g(x)$		$\cup$	p.i.	$\cap$	n.d.

Para $x \in\,]-\infty, 0[$, o gráfico função g tem a concavidade voltada para baixo em $[-1, 0[$, tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1]$ e tem ponto de inflexão em $x = -1$.

7.

7.1.

▪ $C(2{,}5) = 2 \times (2{,}5)^2 e^{-0{,}48\times 2{,}5} = 12{,}5\, e^{-1{,}2} \approx 3{,}76$

Às 12h30min a concentração de medicamento no sangue do Pedro era de, aproximadamente, $3{,}76$ mg/L.

▪ $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (2t^2 e^{-0{,}48t}) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t^2}{e^{0{,}48t}} = 2 \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\underbrace{(e^{0{,}48})}_{>1}{}^t} = 2 \times 0 = 0$

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$ (limite notável), então $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, com $a > 1$ e $p \in \mathbb{R}$

À medida que o tempo passa, a concentração de medicamento no sangue do Pedro tende para zero.

▪ A função C é contínua em $[0, +\infty[$ pois é produto entre funções contínuas em $[0, +\infty[$. Logo, C é contínua em $[1, 2] \subset [0, +\infty[$. Tem-se:

$$C(1) = 2 \times 1^2 \times e^{-0{,}48\times 1} = 2e^{-0{,}48} \approx 1{,}24 \qquad C(2) = 2 \times 2^2 \times e^{-0{,}48\times 2} = 8e^{-0{,}96} \approx 3{,}06$$

Assim como $C(1) < 2 < C(2)$ então pelo teorema de Bolzano $\exists\, c \in\,]1, 2[: C(c) = 2$. Como $t = 0$ corresponde às 10h da manhã, então $t = 1$ corresponde às 11h da manhã e $t = 2$ às 12h. Existe um instante entre as 11h e as 12h em que a concentração de medicamento no sangue do Pedro é de 2 mg/L.

7.2.

- $C'(t) = (2t^2)' \times e^{-0,48t} + 2t^2 \times (e^{-0,48t})' = 4te^{-0,48t} + 2t^2 \times (-0,48\, e^{-0,48t}) =$

$$= 4te^{-0,48t} - 0,96t^2 e^{-0,48t} = e^{-0,48t} \times (4t - 0,96t^2)$$

- $C'(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,48t} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee\ 4t - 0,96t^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t(4 - 0,96t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee\ 4 - 0,96t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee\ t = \frac{25}{6}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função C', vem:

t	0		$\frac{25}{6}$	$+\infty$
i) $C'(t)$	0	$+$	0	$-$
$C(t)$	min.	↗	máx.	↘

i) Observa que o sinal de C' depende apenas do sinal de $4t - 0,96t^2$ porque $e^{-0,48t} > 0,\ \forall\, t \geq 0$.

A função C tem máximo em $t = \frac{25}{6}$. Conservando três casas decimais, $\frac{25}{6} \approx 4,167$, que corresponde a 4 horas e a $0,167 \times 60 \approx 10$ minutos, isto é, a concentração de medicamento atingiu o valor máximo às 14h10min. O valor dessa concentração é dada por $C\left(\frac{25}{6}\right) = 2 \times \left(\frac{25}{6}\right)^2 \mathrm{e}^{-0,48\times\frac{25}{6}} \approx 4,7$ mg/L.

8. Tem-se que $A_{[ABHEFG]} = A_{[ACFG]} - A_{[BCEH]} = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2$. Assim:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BD}\right) \underset{i)}{=} \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB}}_{0} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{HB} + \underbrace{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD}}_{0} =$$

$$\underset{ii)}{=} \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}_{=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \times \cos(0°) + \left\|\overrightarrow{CE}\right\| \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{HB}\right\|}_{=\left\|\overrightarrow{CE}\right\|} \times \cos(180°) =$$

$$= \overline{AC} \times \overline{AC} \times 1 + \overline{CE} \times \overline{CE} \times (-1) = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 = A_{[ABHEFG]}$$

Justificações:

i) Como $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{HB}$ são perpendiculares e como $\overrightarrow{CE}$ e $\overrightarrow{BD}$ também o são, então $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$ e $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

ii) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares com o mesmo sentido, logo o ângulo formado pelos dois tem amplitude $0°$. $\overrightarrow{CE}$ e $\overrightarrow{HB}$ são colineares com sentidos opostos, logo o ângulo formado pelos dois tem amplitude $180°$.

9. Para determinar o volume da pirâmide é necessário conhecer a sua altura, $\overline{VE}$.

▪ O plano α contém os pontos P, Q e S, que não são colineares. Por três quaisquer pontos não colineares passa um único plano. Assim, se os pontos P, Q e S pertencerem ao plano definido pela condição $5x + 2y + 4z = 16$ então esta é uma condição que define o plano α.

Ponto $P(0,0,4)$: $5 \times 0 + 2 \times 0 + 4 \times 4 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$. Verdadeira.

Ponto $Q(0,8,0)$: $5 \times 0 + 2 \times 8 + 4 \times 0 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$. Verdadeira.

Ponto $S(4,-2,0)$: $5 \times 4 + 2 \times (-2) + 4 \times 0 = 16 \Leftrightarrow 20 - 4 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$. Verdadeira.

Está provado, uma condição que define o plano α é $5x + 2y + 4z = 16$.

▪ Seja r a reta que contém o ponto V e é perpendicular ao plano α. Um vetor diretor da reta r pode ser $\vec{r} = \vec{n}_\alpha = (5,2,4)$ e uma condição que a define é $(x,y,z) = (12,7,8) + k(5,2,4)$, $k \in \mathbb{R}$.

▪ A reta r e o plano α intersetam-se no ponto E pelo que as suas coordenadas são a solução do sistema formado pelas equações de r e α. Assim:

$$\begin{cases} (x,y,z) = (12,7,8) + k(5,2,4), k \in \mathbb{R} \\ 5x + 2y + 4z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 5k \\ y = 7 + 2k \\ z = 8 + 4k \\ 5 \times (12 + 5k) + 2 \times (7 + 2k) + 4 \times (8 + 4k) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 5k \\ y = 7 + 2k \\ z = 8 + 4k \\ 60 + 25k + 14 + 4k + 32 + 16k = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ 45k = -90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 5 \times (-2) \\ y = 7 + 2 \times (-2) \\ z = 8 + 4 \times (-2) \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto E são $(2,3,0)$ e $\overrightarrow{VE} = E - V = (2,3,0) - (12,7,8) = (-10,-4,-8)$.

Logo:

$$\left\|\overrightarrow{VE}\right\| = \|(-10, -4, -8)\| = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2 + (-8)^2} = \underbrace{\sqrt{180}}_{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Portanto, $V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{VE} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6\sqrt{5} = \frac{16 \times 6\sqrt{5}}{3} = 32\sqrt{5}$.