PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME – TIPO 3

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O vetor $\vec{n}_\alpha = (b, -2, a)$ é um vetor normal ao plano α e o vetor $\vec{n}_\beta = (a+b, a, 2a)$ é um vetor normal ao plano β. Os planos α e β são perpendiculares se e só se os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ forem perpendiculares, ou seja, $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$. Assim,

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow (b, -2, a) \cdot (a+b, a, 2a) = 0 \Leftrightarrow b \times (a+b) - 2a + 2a = 0 \Leftrightarrow b \times (a+b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 0 \quad \vee \quad a + b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \quad \vee \quad a = -b$$

Como a e b são números reais não nulos, então $a = -b$, ou seja, a e b são simétricos e portanto, tendo em conta as opções apresentadas, $a = 1$ e $b = -1$.

Resposta: B

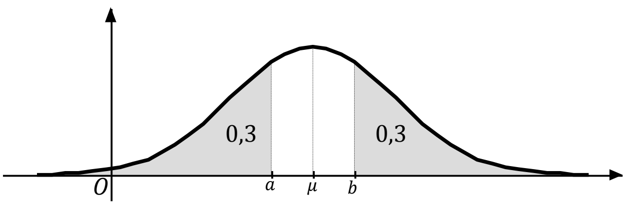
2. O número de casos possíveis é 7^5. Como se pretende que o número seja par, então para o algarismo das unidades existem três hipóteses possíveis (2, 4 ou 6). Para cada uma destas hipóteses existem ${}^6A_4$ maneiras de escolher o restantes quatro algarismos (dos restantes seis escolhem-se ordenadamente quatro). Assim o número de casos favoráveis é $3 \times {}^6A_4$ e portanto, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{3 \times {}^6A_4}{7^5}$.

Resposta: A

3. Seja μ o valor médio da variável aleatória X. A curva de Gauss associada à variável aleatória X é simétrica em relação à reta de equação $x = \mu$. Observa a figura seguinte.

Assim, como $P(X < a) = P(X > b) = 0{,}3$ e $a < b$ tem-se que $a < \mu < b$ e que $|\mu - a| = |\mu - b|$.

Portanto, $\mu = \frac{a+b}{2}$.



Resposta: D

4. Por observação da figura verifica-se que $A(4, f(4))$, $B(8, f(4))$, $C(8, f(8))$ e $D(4, f(8))$. Tem-se:

$$f(4) = \ln 5 + \ln 6 = \ln(5 \times 6) = \ln 30 \ \text{ e } \ f(8) = \ln 9 + \ln 10 = \ln(9 \times 10) = \ln 90$$

Assim:

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{AD} = (8-4) \times (f(8) - f(4)) = 4 \times (\ln 90 - \ln 30) = 4 \ln\left(\frac{90}{30}\right) =$$

$$= 4 \ln 3 = \ln(3^4) = \ln 81$$

Resposta: C

5. Como (u_n) é uma progressão geométrica, então $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ é constante para todo o n natural (é igual à razão). Assim, como p, $p-6$ e $p-8$ são três termos consecutivos de (u_n), tem-se:

$$\frac{p-8}{p-6} = \frac{p-6}{p} \Leftrightarrow p^2 - 8p = (p-6)^2 \Leftrightarrow p^2 - 8p = p^2 - 12p + 36 \Leftrightarrow 4p = 36 \Leftrightarrow p = 9$$

Logo, a razão da progressão é $\frac{9-6}{9} = \frac{1}{3}$ e portanto o seu termo geral é:

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = u_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = u_1 \times \frac{1}{3^n} \times 3 = \frac{3u_1}{3^n}$$

A soma dos seus n primeiros termos é dada por $u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}u_1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$. Logo:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_{n-1} + u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{2}u_1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right] = \frac{3}{2}u_1 \times (1-0) = \frac{3}{2}u_1$$

Portanto, as opções $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ e $\boxed{\text{D}}$ são verdadeiras.

A opção $\boxed{\text{B}}$ é falsa pois $v_{n+1} - v_n = \log_3(u_{n+1}) - \log_3(u_n) = \log_3\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3(3^{-1}) = -1$, ou seja, (v_n) é uma progressão aritmética de razão -1.

Resposta: B

6. Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$
$g(x)$	$\cap$	Ponto anguloso	$\cup$	Ponto anguloso	$\cap$

O gráfico da opção $\boxed{\text{B}}$ não é o correto porque tem ponto de inflexão em $x = -2$ e em $x = 0$ e portanto nesses pontos a segunda derivada é nula. Portanto o gráfico correto é o da opção $\boxed{\text{D}}$.

Resposta: D

7. Tem-se $\frac{z^2}{w}=\frac{(\text{cis}\theta)^2}{2\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{5}\right)}=\frac{\text{cis}(2\theta)}{2\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{5}\right)}=\frac{1}{2}\text{cis}\left(2\theta+\frac{7\pi}{5}\right)$. O número complexo $\frac{z^2}{w}$ é um número real negativo seu argumento for da forma $\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Assim:

$$2\theta+\frac{7\pi}{5}=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2\theta=-\frac{2\pi}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{5}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Fazendo $k=1$, vem $\theta=\frac{4\pi}{5}$.

Resposta: C

8. Seja $z=x+yi$. Tem-se:

$$(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=16\Leftrightarrow(x+yi+x-yi)^2-\big(x+yi-(x-yi)\big)^2=16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2x)^2-(x+yi-x+yi)^2=16\Leftrightarrow 4x^2-(2yi)^2=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4yi^2=16\Leftrightarrow 4x^2+4y^2=16\Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

Portanto a condição $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=16$ define uma circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial.

Resposta: B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Tem-se:

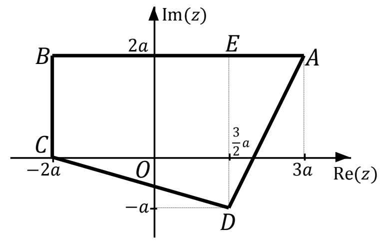
$$z_3=\frac{2+(z_1)^5}{i^{79}}-i^{101}=\frac{2+\left(\text{cis}\frac{4\pi}{5}\right)^5}{i^{4\times19+3}}-i^{4\times25+1}=\frac{2+\text{cis}\left(5\times\frac{4\pi}{5}\right)}{i^3}-i=\frac{2+\overbrace{\text{cis}(4\pi)}^{1}}{-i}-i=\frac{3}{-i}\times\frac{i}{i}-i=\frac{3i}{-i^2}-i=$$

$$=3i-i=2i=2\text{cis}\frac{\pi}{2}$$

z_3 é raiz cúbica de z_2 se $(z_3)^3=z_2$. Assim, $(z_3)^3=\left(2\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^3=2^3\text{cis}\left(3\times\frac{\pi}{2}\right)=8\text{cis}\frac{3\pi}{2}=z_2$ e portanto z_3 é raiz cúbica de z_2. As restantes raízes cúbicas de z_2 são $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\text{cis}\frac{7\pi}{6}$ e $2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\text{cis}\frac{11\pi}{6}$.

2. Os pontos A e B são as imagens geométricas, respetivamente, dos números complexos $z_1=3a+2ai$ e $z_2=-2a+2ai$, com $a\in\mathrm{IR}^+$, portanto $A(3a,2a)$ e $B(-2a,2a)$. Como o ponto C pertence ao eixo real e tem a mesma abcissa que o ponto B, então $C(-2a,0)$. O ponto D é a imagem geométrica do número complexo $\frac{1}{2}\bar{z}_1=\frac{1}{2}(3a-2ai)=\frac{3}{2}a-ai$, logo $D\left(\frac{3}{2}a,-a\right)$. Na figura pode-se ver o quadrilátero $[ABCD]$ representado no plano complexo, para um certo número real $a>0$.

Seja E o ponto de interseção do segmento de reta $[AB]$ com a reta de equação $x = \frac{3}{2}a$, assim $\overline{EB} = 2a + \frac{3}{2}a = \frac{7}{2}a$ e $\overline{AE} = \frac{3}{2}a$, portanto:



$$A_{[ABCD]} = 22 \Leftrightarrow A_{[BCDE]} + A_{[AED]} = 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BC}+\overline{ED}}{2} \times \overline{EB} + \frac{\overline{AE}\times\overline{ED}}{2} = 22$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+3a}{2} \times \frac{7}{2}a + \frac{\frac{3}{2}a\times 3a}{2} = 22 \Leftrightarrow \frac{35}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 = 22$$

$$\Leftrightarrow 44a^2 = 88 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2} \ \vee \ a = \sqrt{2}$$

Como $a > 0$, vem $a = \sqrt{2}$ e portanto $z_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \underset{\text{i)}}{=} 4\text{cis}\frac{3\pi}{4}$.

i) Cálculo auxiliar: Para escrever $z_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $|z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$. Sendo θ um argumento de z_2, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1$ e $\theta \in 2.°$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Assim, $z_2 = 4\text{cis}\frac{3\pi}{4}$.

3.

3.1.

▪ $P\left(A\middle|\left(\bar{A} \cup B\right)\right) = \frac{P\left(A\cap\left(\bar{A}\cup B\right)\right)}{P\left(\bar{A}\cup B\right)} = \frac{P\left(\left(A\cap\bar{A}\right)\cup\left(A\cap B\right)\right)}{P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)} =$

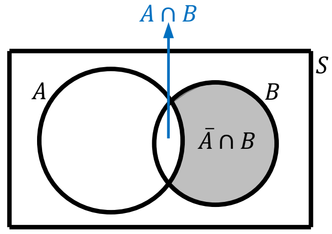
$$\underset{i)}{=} \frac{P\left(\emptyset\cup\left(A\cap B\right)\right)}{P(\bar{A})+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)} =$$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(\bar{A})+P(B)-P(B)+P(A\cap B)} =$$

$$\underset{ii)}{=} \frac{P(A)\times P(B)}{1-P(A)+P(A)\times P(B)} =$$

$$= \frac{a\times b}{1-a+a\times b} = \frac{a\times b}{1+a\times(b-1)}$$

i)



$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

ii) A e B são independentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Tem-se que $2P(A) - P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B) = 2P(A) \Leftrightarrow b = 2a$ e que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = a \times b$. Assim:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{9} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{9} \Leftrightarrow a + b - a \times b = \frac{7}{9} \underset{b=2a}{\Leftrightarrow} a + 2a - a \times 2a = \frac{7}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 3a - \frac{7}{9} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \vee a = \frac{7}{6}$$

Como $0 < a < 1$, vem $a = \frac{1}{3}$ e $b = 2a = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Portanto, $P\left(A\middle|(\bar{A} \cup B)\right) = \frac{a \times b}{1 + a \times (b-1)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} - 1\right)} = \frac{\frac{2}{9}}{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

3.2. Considere-se os acontecimentos A:«o trabalhador tem menos de 25 anos» e B: «o trabalhador é solteiro». Os acontecimentos A e B são independentes, portanto pode-se aplicar a igualdade enunciada em **3.1.**. Do enunciado vem $a = P(A) = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ e $P(B|A) = \frac{5}{7}$. Como A e B são independentes, tem-se $b = P(B) = P(B|A) = \frac{5}{7}$.

Pretende-se determinar $P\left(A\middle|(\bar{A} \cup B)\right)$. Assim:

$$P\left(A\middle|(\bar{A} \cup B)\right) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{5}{7}}{1 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{7} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{5} \times \left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{2}{35}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{33}{35}} = \frac{35}{33 \times 7} = \frac{5}{33}$$

Portanto a probabilidade pedida é $\frac{5}{33}$.

4. Para solucionar este problema, comecemos por separá-lo em dois casos: os números naturais entre 10000 e 29999 que se iniciam por 1 e os que se iniciam por 2:

1.º Caso (os que se iniciam por 1): pretende-se que a soma dos cinco algarismos seja um número ímpar. Como o primeiro algarismo é ímpar, a soma dos restantes quatro terá de ser par. Portanto temos de considerar três casos: os restantes quatro algarismos são ímpares, ou os restantes quatro algarismos são pares, ou entre os restantes quatro algarismos, dois são pares e os outros dois ímpares.

Os restantes quatro algarismos são ímpares:	Os restantes quatro algarismos são pares:
$\underset{1}{\underline{1}}$ $\underset{4}{\underline{\text{ímpar}}}$ $\underset{3}{\underline{\text{ímpar}}}$ $\underset{2}{\underline{\text{ímpar}}}$ $\underset{1}{\underline{\text{ímpar}}}$	$\underset{1}{\underline{1}}$ $\underset{4}{\underline{\text{par}}}$ $\underset{3}{\underline{\text{par}}}$ $\underset{5}{\underline{\text{par}}}$ $\underset{4}{\underline{\text{par}}}$
O total de números nestas condições é $4!$.	O total de números nestas condições é: $5 \times 4 \times 3 \times 2 = {}^5A_4$

Entre os restantes quatro algarismos, dois são pares e dois são ímpares, por exemplo:

$$\underset{1}{\underline{1}}\ \underset{4}{\underline{\text{ímpar}}}\ \underset{3}{\underline{\text{ímpar}}}\ \underset{5}{\underline{\text{par}}}\ \underset{4}{\underline{\text{par}}}$$

Começa-se por escolher as posições que os números ímpares (ou os pares) podem ocupar, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_2$ (entre as quatro posições escolhem-se duas, as restantes duas ficam para os pares). O total de números nestas condições é:

$${}^4C_2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 4 = {}^4C_2 \times {}^4A_2 \times {}^5A_2$$

2.º Caso (os que se iniciam por 2): pretende-se que a soma dos cinco algarismos seja um número ímpar. Como o primeiro é par, a soma dos restantes quatro terá de ser ímpar. Portanto temos de considerar dois casos: entre os restantes quatro algarismos, três são ímpares e um é par, ou entre os restantes quatro algarismos, três são pares e um é ímpar.

Entre os restantes quatro algarismos, três são ímpares e um é par, por exemplo:

$$\underset{1}{\underline{2}}\ \underset{5}{\underline{\text{ímpar}}}\ \underset{4}{\underline{\text{ímpar}}}\ \underset{3}{\underline{\text{ímpar}}}\ \underset{4}{\underline{\text{par}}}$$

Começa-se por escolher as posições que os números ímpares (ou o par) podem ocupar, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$ (ou ${}^4C_1$) (entre as quatro posições escolhem-se três, a restante fica para o par). O total de números nestas condições é:

$${}^4C_3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 = {}^4C_3 \times {}^5A_3 \times 4$$

Entre os restantes quatro algarismos, três são pares e um é ímpar, por exemplo:

$$\underset{1}{\underline{2}}\ \underset{4}{\underline{\text{par}}}\ \underset{3}{\underline{\text{par}}}\ \underset{2}{\underline{\text{par}}}\ \underset{5}{\underline{\text{ímpar}}}$$

Começa-se por escolher as posições que os números pares (ou o ímpar) podem ocupar, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$ (ou ${}^4C_1$) (entre as quatro posições escolhem-se três, a restante fica para o ímpar). O total de números nestas condições é:

$${}^4C_3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 5 = {}^4C_3 \times {}^4A_3 \times 5$$

Logo o total de números nas condições do enunciado é:

$$4! + {}^5A_4 + {}^4C_2 \times {}^4A_2 \times {}^5A_2 + {}^4C_3 \times {}^5A_3 \times 4 + {}^4C_3 \times {}^4A_3 \times 5 = 3024$$

5.

5.1. Como $t = 0$ corresponde às 9h da manhã, então $t = 15$ corresponde às 9h15min e $t = 30$ corresponde às 9h30min. A função A é contínua em $[0, 38]$ pois é composição e diferença entre funções contínuas em $[0, 38]$. Logo, A é contínua em $[15, 30] \subset [0, 38]$. Tem-se:

- $A(15) = 5 - 2 \times 15 + 15\ln(3 \times 15 + 5) = -25 + 15\ln(50) \approx 33{,}68$

- $A(30) = 5 - 2 \times 30 + 15\ln(3 \times 30 + 5) = -55 + 15\ln(95) \approx 13{,}31$

Assim, como $A(30) < 25 < A(15)$, pelo teorema de Bolzano $\exists\, c \in \,]15, 30[\colon A(c) = 25$, ou seja, existe um instante entre as $9\text{h}15\text{min}$ e as $9\text{h}30\text{min}$ em que o parapente do Manuel esteve a 25 metros de altura.

5.2. Tem-se:

- $A'(t) = -2 + 15 \times \frac{(3t+15)'}{3t+5} = -2 + 15 \times \frac{3}{3t+5} = \frac{-6t-10+45}{3t+5} = \frac{-6t+35}{3t+5}$

- $A'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 35 = 0 \;\wedge\; 3t + 5 \neq 0 \Leftrightarrow t = \frac{35}{6} \;\wedge\; t \neq -\frac{5}{3}$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função A', vem:

t	0		$\frac{35}{6}$		38
$-6t+35$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$3t+5$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$A'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$A(t)$	min.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	min.

A função A tem máximo em $t = \frac{35}{6}$. Conservando três casas decimais, $\frac{35}{6} \approx 5{,}833$, que corresponde a 5 minutos e a $0{,}833 \times 60 \approx 50$ minutos, isto é, o parapente do Manuel atingiu a altura máxima 5 minutos e 50 segundos após o salto se ter iniciado. O valor dessa altura é dada por $A\left(\frac{35}{6}\right) = 5 - 2 \times \frac{35}{6} + 15 \ln\left(3 \times \frac{35}{6} + 5\right) = -\frac{20}{3} + 15 \ln\left(\frac{45}{2}\right) \approx 40$ metros.

6.

6.1.

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^3+x-1}{x^2\sqrt{x^2}-x} = \frac{3\times 0^3+0-1}{0^2\times\sqrt{0^2}-0} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x + \mathrm{e}^{3-x}\right) = 0 + \mathrm{e}^{3-0} = \mathrm{e}^3.$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função g. Como a função g é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas não verticais

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^3+x-1}{x^2\sqrt{x^2-x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x-1}{x^3\sqrt{x^2-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(3+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{3+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{-\infty}}{\sqrt{+\infty\times\left(1-\frac{1}{-\infty}\right)}} =$$

$$= \frac{3+0+0}{\sqrt{+\infty\times(1+0)}} = \frac{3}{\sqrt{+\infty}} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x-1}{x^2\sqrt{x^2-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{-\cancel{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{3+\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{-\infty}}{-\sqrt{1-\frac{1}{-\infty}}} = \frac{3+0+0}{-\sqrt{1+0}} = \frac{3}{-1} = -3$$

Nota: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$. Como $x \longrightarrow -\infty$ pode assumir-se que x é negativo, logo $\sqrt{x^2} = |x| = -x$-

A reta de equação $y = -3$ é assíntota horizontal do gráfico de g, quando $x \to -\infty$.

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{3-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{e^{3-x}}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3-x}}{x} = 1 + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (x + e^{3-x} - x) = \lim_{x\to+\infty} e^{3-x} = e^{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$.

6.2.

▪ Para $x \in [0, +\infty[$, tem-se que:

$$f(x) = g(x) - 1 = x + e^{3-x} - 1 = x - 1 + e^{3-x} \qquad \text{e} \qquad h(x) = -f(x) = -(x - 1 + e^{3-x})$$

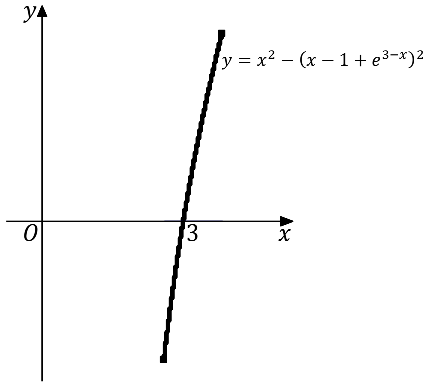
Como o ponto A pertence ao gráfico de f e o ponto B pertence ao gráfico de h, então:

$$A(x, f(x)) = (x, x - 1 + e^{3-x}) \qquad \text{e} \qquad B(x, f(x)) = (x, -(x - 1 + e^{3-x}))$$

▪ O triângulo $[AOB]$ é rectângulo em O se $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. Assim:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (x, x - 1 + e^{3-x}) \cdot \left(x, -(x - 1 + e^{3-x})\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x - 1 + e^{3-x})^2 = 0$$

▪ Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = x^2 - (x - 1 + e^{3-x})^2$ na janela de visualização $[0, 5] \times [-5, 5]$.



Logo:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x - 1 + e^{3-x})^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

As coordenadas do ponto A são $(3, 3 - 1 + e^{3-3}) = (3,3)$, e do ponto B são $\left(3, -(3 - 1 + e^{3-3})\right) = (3, -3)$.

Portanto:

$$P_{[AOB]} = \underbrace{\overline{AB}}_{6} + \overline{OA} + \overline{OB} \underset{\overline{OA}=\overline{OB}}{=} 6 + 2\overline{OA} = 6 + 2\sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} = 6 + 2\underbrace{\sqrt{18}}_{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} + 6$$

7.

7.1. Tem-se:

▪ $1 + \mathrm{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{10}$

▪ $\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\theta + \frac{9}{10} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\theta = 1 - \frac{9}{10} \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{10}$

Portanto, para $a = -1$ e $b = 2$, vem:

$$g(\theta) = -1 + 2\cos^2\theta + c\,\mathrm{sen}^2\theta = -1 + 2 \times \frac{9}{10} + c \times \frac{1}{10} = \frac{-10+18+c}{10} = \frac{c+8}{10}$$

7.2.

▪ Tem-se:

$$g(x) = a + b\cos^2 x + c\,\mathrm{sen}^2 x = a + b\cos^2 x + c(1 - \cos^2 x) = a + b\cos^2 x + c - c \times \cos^2 x =$$

$$= a + c + (b - c)\cos^2 x$$

Assim:

$$\forall\, x \in \mathrm{IR},\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \underset{b-c>0}{\Leftrightarrow} 0 \leq (b-c)\cos^2 x \leq b-c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+c \leq a+c+(b-c)\cos^2 x \leq a+c+b-c$$

$$\Leftrightarrow a+c \leq a+c+(b-c)\cos^2 x \leq a+b$$

Como o contradomínio da função g é $[3,5]$, vem $a+c=3$ e $a+b=5$ $(\mathbf{1})$

▪ Sejam r a reta da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ e t a reta tangente gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$. Como o vetor $(a,1)$ é um vetor diretor de r, então $m_r = \frac{1}{a}$ e portanto $m_t - \frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{1}{a}} = -a$. Logo, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = m_t = -a$.

Assim:

$$g'(x) = \left(a+c+(b-c)\cos^2 x\right)' = 2(b-c)\cos x \times (\cos x)' = 2(b-c)\cos x \times (-\operatorname{sen} x) =$$

$$= -(b-c) \times 2\,\cos x\,\operatorname{sen} x = -(b-c)\operatorname{sen}(2x) = (c-b)\operatorname{sen}(2x)$$

Portanto:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -a \Leftrightarrow (c-b)\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) = -a \Leftrightarrow (c-b)\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = -a \Leftrightarrow c-b=-a\ (\mathbf{2})$$

Com as equações de $(\mathbf{1})$ e de $(\mathbf{2})$ podemos formar um sistema que permitirá determinar os valores de a, b e c:

$$\begin{cases} a+c=3 \\ a+b=5 \\ c-b=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3-a \\ b=5-a \\ 3-a-(5-a)=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ 3-a-5+a=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ -2=-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=3-2 \\ b=5-2 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases}$$

8.

▪ Duas retas definem um plano se forem estritamente paralelas ou se forem concorrentes:

Tem-se $r: x = 0 \quad \wedge \quad y - 6 = -2z \Leftrightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{y-6}{-2} = z$, portanto um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (0, -2, 1)$. Um vetor diretor da reta s é $\vec{s} = (-7, 4, 1)$, assim as retas r e s não são paralelas pois os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares.

Tem-se:

$$\begin{cases} x = 0 \quad \wedge \quad y - 6 = -2z \\ (x, y, z) = (7,0,0) + k(-7,4,1), k \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 6 = -2z \\ x = 7 - 7k \\ y = 4k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 7k = 0 \\ 4k - 6 = -2k \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ x = 7 - 7 \times 1 \\ y = 4 \times 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Logo as retas r e s são concorrentes no ponto de coordenadas $(0,4,1)$ e portanto definem um plano.

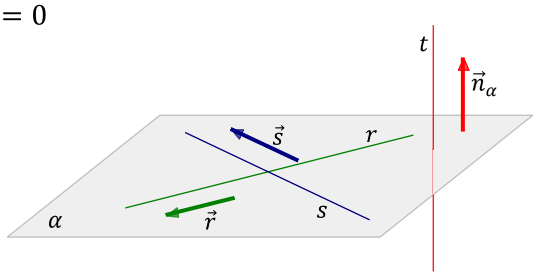
▪ Sejam α o plano definido pelas retas r e s, $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$ um vetor normal a α e t a reta perpendicular a α que contém o ponto $P(2, -1, 3)$. Como a reta t é perpendicular a α, então um vetor diretor de t pode ser $\vec{n}_\alpha$.

O plano α é definido pelas reta r e s, portanto $\vec{n}_\alpha \perp \vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha \perp \vec{s}$ (ver figura). Assim vem:

$$\begin{cases} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n}_\alpha \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-7, 4, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + c = 0 \\ -7a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ -7a + 4b + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ -7a = -6b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = \frac{6}{7} b \end{cases}$$



Concluímos então que as coordenadas do vetor $\vec{n}_\alpha$ são da forma $\left(\frac{6}{7}b, b, 2b\right)$, sendo b um número real não nulo. Fazendo, por exemplo, $b = 7$ vem que $\vec{n}_\alpha = (6,7,14)$ é um vetor normal ao plano α e consequentemente um vetor diretor da reta t. Assim as equações cartesianas da reta t são $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-3}{14}$.