PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME–TIPO 4

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O número de casos possíveis é ${}^{10}C_4$. Para determinar o número de casos possíveis tem que se considerar três casos:

▪ a Maria vai ao teatro e o Pedro não. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{8}C_3$ (como a Maria vai e o Pedro não, temos de escolher três pessoas entre as restantes oito);

▪ o Pedro vai ao teatro e a Maria não. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{8}C_3$ (como o Pedro vai e a Maria não, temos de escolher três pessoas entre as restantes oito);

▪ nenhum dos dois irmãos vai o teatro. O número de maneiras de formar um grupo com estas características é ${}^{8}C_4$ (como a Maria e o Pedro não vão, temos de escolher quatro pessoas entre as restantes oito).

No triângulo de Pascal a soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento que se encontra entre os dois na linha seguinte.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_3 + \overbrace{{}^{8}C_3 + {}^{8}C_4}^{{}^{9}C_4} = {}^{8}C_3 + {}^{9}C_4$. Portanto, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{8}C_3+{}^{9}C_4}{{}^{10}C_4}$.

Resposta: B

2. $P(\overline{X}|Y)$ designa a probabilidade das duas bolas retiradas serem de cores diferentes sabendo que no lançamento do dado saiu a face numerada com o número 1. Como o número 1 não é primo, passam-se da caixa B para a caixa A três bolas pretas, ficando assim a caixa A com 13 bolas, seis brancas e sete pretas. Logo, o número de casos possíveis é ${}^{13}C_2$ e o número de casos favoráveis é ${}^{6}C_1 \times {}^{7}C_1 = 42$ (das seis bolas brancas retira-se uma e das sete pretas outra). Assim, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é $P(\overline{X}|Y) = \frac{42}{{}^{13}C_2} = \frac{7}{13}$.

Resposta: C

3. O ângulo entre dois vetores é obtuso se e só se o produto escalar entre os dois vetores for negativo, portanto o ângulo entre os vetores $2\vec{a}$ e $-\vec{b}$ é obtuso se e só se $(2\vec{a}) \cdot \left(-\vec{b}\right) < 0$. Tem-se que $2\vec{a} = (2k-4, 7k, 3k-6)$ e $-\vec{b} = (k^2, k-2, 1)$, assim vem:

$$(2\vec{a}) \cdot \left(-\vec{b}\right) < 0 \Leftrightarrow (2k-4, 7k, 3k-6) \cdot (k^2, k-2, 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2k-4) \times k^2 + 7k \times (k-2) + (3k-6) \times 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k-2) \times 2k^2 + 7k \times (k-2) + 3 \times (k-2) < 0 \Leftrightarrow (k-2)(2k^2+7k+3) < 0$$

Fazendo um quadrado de sinal:

k	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$k-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2k^2+7k+3$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2\vec{a})\cdot(-\vec{b})$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Logo $k \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]-\frac{1}{2},2\right[$.

Cálculos Auxiliares: $k-2=0 \Leftrightarrow k=2$; $2k^2+7k+3=0 \Leftrightarrow k=-3 \quad \vee \quad k=-\frac{1}{2}$.

Resposta: B

4. Tem-se:

$$\lim\left(2n^2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim\left(2n\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)=\lim\left(4n\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right)=\lim(4n)\times\lim\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=$$

$$\underset{i)}{=}(+\infty)\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}}=+\infty\times 1=+\infty$$

i) Mudança de variável: Seja $x=\frac{2}{n}$, se $n\to+\infty$ então $x\to 0$.

Assim, pela definição de limite segundo Heine, $\lim g\left(2n^2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-1$.

Resposta: B

5. Como a função f é contínua em IR, então também é contínua em $x=-2$ e em $x=0$.

A função f é contínua em $x=-2$ se e só se $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=f(-2)$. Assim:

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{ke^{x+2}-k}{x+2}\underset{i)}{=}\lim_{y\to-0^-}\frac{ke^y-k}{y}=k\times\underbrace{\lim_{y\to-0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}=k\times 1=k$$

i) Mudança de variável: Se $x\to-2^-$ então $x+2\to 0^-$. Seja $y=x+2$, $y\to 0^-$.

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=f(-2)=k^2$$

Logo, $k^2=k \Leftrightarrow k^2-k=0 \Leftrightarrow k(k-1)=0 \Leftrightarrow k=0 \quad \vee \quad k-1=0 \Leftrightarrow k=0 \quad \vee \quad k=1$ **(1)**

A função f é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Assim:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-\ln(kx+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{x} - \frac{\ln(kx+1)}{x}\right) = 2 - k \times \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(kx+1)}{kx} = 2 - k \times 1 = 2 - k$$

Se $x \to 0$ então $kx \to 0$ (limite notável)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = k^2$$

Logo, $k^2 = 2 - k \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2 \ \vee \ k = 1$ (2)

Portanto, de (1) e de (2), conclui-se que $k = 1$.

Resposta: C

6. A resposta correta é a $\boxed{\text{C}}$. De facto a função $g(x) = 2^x + \log_4(x+2)$ é contínua em $]-2, +\infty[$ e portanto também é contínua em $[-1, 2] \subset]-2, +\infty[$. Tem-se:

$$g(-1) = 2^{-1} + \log_4(-1+2) = \frac{1}{2} + \log_4(1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(2) = 2^2 + \log_4(2+2) = 4 + \log_4(4) = 5$$

Assim, como $g(-1) < 2 < g(2)$, pelo teorema de Bolzano $\exists c \in]-1, 2[: g(c) = 2$.

Nota: A função da opção A também verifica a condição $g(-1) < 2 < g(2)$, contudo esta função não é contínua em $x = 0$ e portanto não é contínua em $[-1, 2]$.

Resposta: C

7. Tem-se $z^3 - z^2 = 5z - 21 \Leftrightarrow z^3 - z^2 - 5z + 21 = 0$. Como -3 é solução da equação, recorrendo à regra de Ruffini, vem:

$$z^3 - z^2 - 5z + 21 = 0 \Leftrightarrow (z+3) \times (z^2 - 4z + 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + 3 = 0 \ \vee \ z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \ \vee \ z = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times 1 \times 7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \ \vee \ z = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \ \vee \ z = \frac{4 \pm \sqrt{12} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \ \vee \ z = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 \ \vee \ z = 2 - \sqrt{3}i \ \vee \ z = 2 + \sqrt{3}i$$

Cálculo Auxiliar: (Regra de Ruffini)

	1	-1	-5	21
-3		-3	12	-21
	1	-4	7	0

$z^3 - z^2 - 5z + 21 = (z+3)(z^2 - 4z + 7)$

Resposta: A

8. Tem-se $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Assim:

$$\frac{2z}{i} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2i\cos(-\alpha)}{i} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha-2i\cos\alpha}{i} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha-2i\cos\alpha}{i}\times\frac{-i}{-i} = \frac{-2i\operatorname{sen}\alpha+2i^2\cos\alpha}{-i^2} =$$

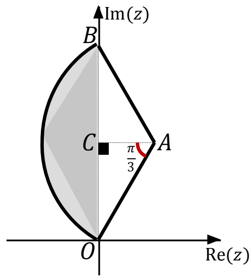
$$= -2\cos\alpha - 2i\operatorname{sen}\alpha = -2(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = -2\operatorname{cis}\alpha = 2\operatorname{cis}(\alpha+\pi)$$

Resposta: A

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Como $\overline{AB} = \overline{OA}$, então o triângulo $[OAB]$ é isósceles. Seja C o ponto médio do segmento de reta $[OB]$, como representado na figura:



Tem-se que $O\hat{A}C = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ e que $\overline{OC} = 1$, assim:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto A são $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ e portanto $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$. Como as coordenadas do ponto B são $(0,2)$ vem $z_2 = 2i$. Assim:

$$3(z_1)^2 + 3\sqrt{3}z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)^2 + 3\sqrt{3}\times 2i = 3\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i+i^2\right) + 6\sqrt{3}i =$$

$$= 3\left(-\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) + 6\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 6\sqrt{3}i = -2 + 8\sqrt{3}i$$

Portanto, $\left|3(z_1)^2 + 3\sqrt{3}z_2\right| = \left|-2+8\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+64\times 3} = \sqrt{196} = 14$.

1.2. A região colorida da figura é a parte do círculo centrado em A, imagem geométrica de z_1 e raio $\overline{OA}$, que está contida no segundo quadrante, eixo imaginário não incluído. Tem-se:

$$\overline{OA} = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{9}+1} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Uma condição que define a região colorida da figura é:

$$|z - z_1| \le \frac{2\sqrt{3}}{3} \ \wedge\ \operatorname{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \left|z - \frac{\sqrt{3}}{3} - i\right| \le \frac{2\sqrt{3}}{3} \ \wedge\ \operatorname{Re}(z) < 0$$

- $A_{\text{colorida}} = A_{\text{setor}OAB} - A_{[OAB]} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{\overline{OB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2\pi}{6} \times \frac{12}{9} - \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{4\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{9}$

- $P_{\text{colorido}} = \text{comprimento do arco } OB + \overline{OB} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} + 2 = \frac{4\pi\sqrt{3}+18}{9}$

2.

2.1. Tem-se, $\frac{P(B|A) \times P(A)}{P(A|B)} = \frac{\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \times P(A)}{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = \frac{P(B\cap A) \times P(B)}{P(A\cap B)} = P(B)\ (1)$

Por outro lado:

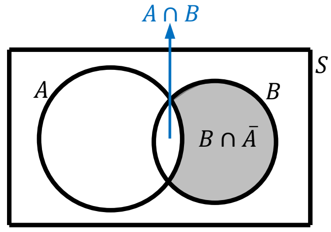
$P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) =$

$= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \times P(A) + \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \times P(\bar{A})$

$= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$\underset{i)}{=} P(B \cap A) + P(B) - P(B \cap A) = P(B)\ (2)$

i)



$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

Portanto de (1) e de (2) conclui-se que $P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(A|B)}$.

2.2.

2.2.1. Considere-se os acontecimentos A: «a bola retirada da caixa é encarnada» e B:«a bola retirada da caixa está numerada com um número par». Do enunciado vem $P(A) = 0{,}3 = \frac{3}{10}$, $P(B|A) = \frac{5}{12}$ e $P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4}$. Pretende-se determinar $P(A|B)$, assim:

$$P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(A|B)} \Leftrightarrow \frac{5}{12} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{\frac{5}{12} \times 0{,}3}{P(A|B)} \Leftrightarrow \frac{13}{20} = \frac{\frac{1}{8}}{P(A|B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{20}} = \frac{20}{104} = \frac{5}{26}$$

Portanto a probabilidade pedida é $\frac{5}{26}$.

Outra resolução: Pode-se responder a esta questão construindo uma tabela. Considerando os mesmos acontecimentos A e B tem-se:

	A	$\bar{A}$	p.m.
B	$\frac{1}{8}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{20}$
$\bar{B}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{20}$
p.m.	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

Justificações:

- $P(B|A) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{5}{12} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{8}$
- $P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$
- $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10} - \frac{1}{8} = \frac{7}{40}$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{10} - \frac{21}{40} = \frac{7}{40}$

Logo $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{20}} = \frac{5}{26}$.

2.2.2. Pela tabela construída na alínea anterior tem-se que 25 $\left(\frac{1}{8} \times 200\right)$ bolas são encarnadas e estão numeradas com um número par, 105 $\left(\frac{21}{40} \times 200\right)$ bolas são pretas e estão numeradas com um número par, 35 $\left(\frac{7}{40} \times 200\right)$ bolas são encarnadas e estão numeradas com um número ímpar e 35 bolas são pretas e estão numeradas com um número ímpar. Portanto, pretende-se extrair duas bolas encarnadas numeradas com um número par entre as 25 (o número de maneiras de o fazer é ${}^{25}C_2$), duas bolas pretas numeradas com um número par entre as 105 (o número de maneiras de o fazer é ${}^{105}C_2$), três bolas encarnadas numeradas com um número ímpar entre as 35 (o número de maneiras de o fazer é ${}^{35}C_3$) e três bolas pretas numeradas com um número ímpar entre as 35 (o número de maneiras de o fazer é ${}^{35}C_3$). Logo, o número de maneiras de escolher dez bolas entre as 200 nas condições pedidas é ${}^{25}C_2 \times {}^{105}C_2 \times {}^{35}C_3 \times {}^{35}C_3 = {}^{25}C_2 \times {}^{105}C_2 \times \left({}^{35}C_3\right)^2$.

3. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + 2x) = 5$ então a reta de equação $y = -2x + 5$ é assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $x \to +\infty$. Portanto $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -2$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x + 5) = -\infty$. Assim, se $y = mx + b$ for a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, vem:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{f(x)-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{xf(x)-x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2\left(\frac{xf(x)}{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{f(x)}{x}-1} = \frac{3}{-2-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{f(x)-x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+xf(x)-x^2}{f(x)-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+xf(x)}{f(x)-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)+2x)}{x\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+2x}{\frac{f(x)}{x}-1} = \frac{5}{-2-1} = -\frac{5}{3}$$

Logo o gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$, de equação $y = -x - \frac{5}{3}$.

4.

4.1.

▪ $g'(3) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x^2-7)e^{3-x}-2}{x-3} \underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{y\to 0}\frac{((y+3)^2-7)e^{-y}-2}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{(y^2+6y+9-7)e^{-y}-2}{y} =$

$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{(y^2+6y+2)e^{-y}-2}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{(y^2+6y)e^{-y}+2e^{-y}-2}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{(y^2+6y)e^{-y}}{y} + \lim\limits_{y\to 0}\frac{2e^{-y}-2}{y}$

$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{y(y+6)e^{-y}}{y} + 2\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{-y}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\left((y+6)e^{-y}\right) - 2\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{-y}-1}{-y}$

$= (0+6)\times e^0 - 2\times 1 = 6-2 = 4$

Se $y \to 0$ então $-y \to 0$ (limite notável)

i) Mudança de variável: Se $x \to 3$ então $x-3 \to 0$. Seja $y = x-3 \Leftrightarrow x = y+3$, $y \to 0$.

▪ Seja t a reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3. Assim, $m_t = -\frac{1}{g'(3)} = -\frac{1}{4}$ e portanto, um vetor diretor da reta , pode ser $\vec{t} = (4,-1)$. O ponto de coordenadas $(3, g(3)) = (3,2)$ pertence à reta t, assim, a equação vetorial da reta t pode ser $(x,y) = (3,2) + k(4,-1),\, k \in \mathbb{Z}$.

Nota: Para escrever a equação reduzida da reta pedida, poderíamos proceder da seguinte forma:

Como $m_t = -\frac{1}{4}$, então a equação reduzida da reta t é do tipo $y = -\frac{1}{4}x + b$. O ponto de coordenadas $(3, g(3)) = (3,2)$ pertence à reta t, logo $2 = -\frac{1}{4}\times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{4}$. A equação reduzida da reta t é $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$.

Ou de um outra forma: A equação reduzida da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3 é dada por:

$$y - g(3) = -\frac{1}{g'(3)}(x-3) \Leftrightarrow y-2 = -\frac{1}{4}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

4.2. Tem-se:

▪ $g'(x) = 2xe^{3-x} - (x^2-7)e^{3-x} = e^{3-x}\times(-x^2+2x+7)$

$g''(x) = -e^{3-x}\times(-x^2+2x+7) + e^{3-x}\times(-2x+2) = e^{3-x}\times(x^2-2x-7-2x+2) =$

$= e^{3-x}\times(x^2-4x-5)$

▪ $g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3-x}\times(x^2-4x-5) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{3-x} = 0}_{\text{eq. impossível}} \;\vee\; x^2-4x-5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \;\vee\; x = 5$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
i) $g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

i) Observa que o sinal de g'' depende apenas do sinal de $x^2 - 4x - 5$ porque $e^{3-x} > 0, \forall\, x \in \text{IR}$.

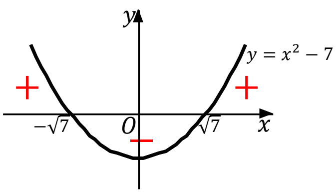
O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $[-1, 5]$, tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1]$ e em $[5, +\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x = -1$ e em $x = 5$.

4.3. Vamos começar por calcular o domínio de $\ln\big(g(x)\big) + x \leq 3 + \ln(2x + 8)$.

$$D = \{x \in \text{IR}: g(x) > 0 \;\wedge\; 2x + 8 > 0\} = \{x \in \text{IR}: \big(x < -\sqrt{7} \;\vee\; x > \sqrt{7}\big) \;\wedge\; x > -4\} =$$

$$= \,]-4, -\sqrt{7}[\, \cup \,]\sqrt{7}, +\infty[$$

Cálculo auxiliar: $g(x) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - 7)e^{3-x} > 0}_{e^{3-x} > 0,\, \forall x \in \text{IR}} \Leftrightarrow x^2 - 7 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{7} \;\vee\; x > \sqrt{7}$



$x^2 - 7 > 0 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -\sqrt{7}[\, \cup \,]\sqrt{7}, +\infty[$

Neste domínio tem-se:

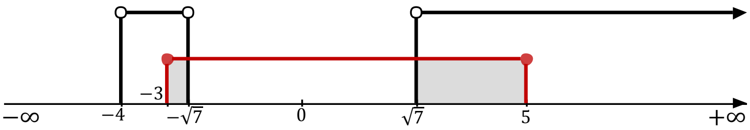
$$\ln\big(g(x)\big) + x \leq 3 + \ln(2x + 8) \Leftrightarrow \ln\big((x^2 - 7)e^{3-x}\big) + x \leq 3 + \ln(2x + 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 7) + \ln(e^{3-x}) + x \leq 3 + \ln(2x + 8)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 7) + 3 - x + x \leq 3 + \ln(2x + 8)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 7) \leq \ln(2x + 8)$$

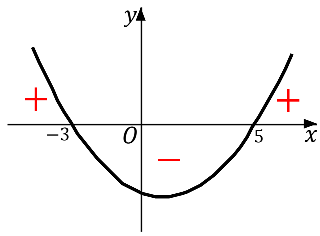
$$\Leftrightarrow x^2 - 7 \leq 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 \leq 0$$



Portanto, C.S. $= [-3, -\sqrt{7}[\cup]\sqrt{7}, 5]$.

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \ \vee \ x = 5$



$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3,5]$

5.

5.1.

▪ Pelo teorema de Pitágoras tem-se $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 \underset{\overline{AD}=\overline{CD}}{\Leftrightarrow} 2\overline{AD}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 4$, como $\overline{AD} > 0$, vem $\overline{AD} = 2$.

▪ $A_{[ACP]} = A_{[ACD]} - A_{[APD]} = \frac{\overline{AD}\times\overline{CD}}{2} - \frac{\overline{AD}\times\overline{DP}}{2} = \frac{2\times 2}{2} - \frac{2\times\overline{DP}}{2} = 2 - \overline{DP}$. Como $D\hat{A}P = \frac{\pi}{4} - x$, vem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\overline{DP}}{2} \Leftrightarrow \overline{DP} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Assim:

$$A_{[ACP]} = 2 - \overline{DP} = 2 - 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 - 2 \times \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{tg} x} = 2 - 2 \times \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{2 + 2\operatorname{tg} x - 2 + 2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{4\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = f(x)$$

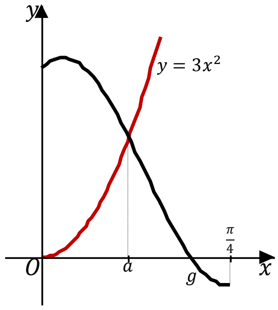
▪ Para $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ tem-se:

$$f(x) = \frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{4\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{3}\right)4\operatorname{tg} x = 4\sqrt{3}(1+\operatorname{tg} x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\operatorname{tg} x + 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\operatorname{tg} x = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \text{ pois } x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$$

5.2. Pretende-se determinar a solução da equação $g(x) = 3x^2$ pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = g(x)$ e $y_2 = 3x^2$ na janela de visualização $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [-1, 2]$.



Assim, $g(x) = 3x^2 \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 0{,}46$. Como $A_{[APD]} = A_{[ACD]} - A_{[ACP]} = 2 - f(x)$, para $x = a$, vem:

$$A_{[APD]} = 2 - f(a) = 2 - \frac{4 \operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a} \approx 0{,}7$$

6.

6.1. O ponto V pertence ao eixo Oz, portanto as suas coordenadas são da forma $(0,0,z)$, sendo que z corresponde á altura da pirâmide. Assim tem-se, $V_{[ABCDV]} = 48 \Leftrightarrow \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = 48 \Leftrightarrow \frac{4\times6\times z}{3} = 48 \Leftrightarrow 8z = 48 \Leftrightarrow z = 6$, portanto $V(0,0,6)$.

▪ Um vetor diretor da reta AV é $\overrightarrow{AV} = V - A = (0,0,6) - (2,3,0) = (-2,-3,6)$. Portanto, uma condição que define a reta AV é $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-0}{6} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{z}{6}$.

▪ Tem-se que α: $2ax + 2a^2x + a^3(y+z) = 2 \Leftrightarrow (2a+2a^2)x + a^3y + a^3z = 2$. Logo um vetor normal a α é $\vec{n}_\alpha = (2a+2a^2, a^3, a^3)$. A reta AV é paralela ao plano α se e só se o vetor $\overrightarrow{AV}$ for perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$, ou seja, $AV \parallel \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AV} \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AV} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Assim:

$$\overrightarrow{AV} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (-2,-3,6)\cdot(2a+2a^2, a^3, a^3) = 0 \Leftrightarrow -4a - 4a^2 - 3a^3 + 6a^3 = 0 \Leftrightarrow$$

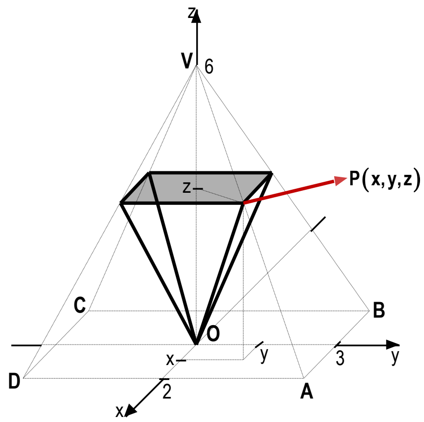
$$\Leftrightarrow 3a^3 - 4a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(3a^2 - 4a - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad 3a^2 - 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times3\times(-4)}}{2\times3}$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad a = 2$$

Como $a \neq 0$, então $a = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad a = 2$.

6.2.



▪ $g(x) = V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{2x \times 2y \times x}{3} = \frac{4}{3}xyz$

Como o ponto P pertence ao segmento de reta $[AV]$ também pertence à reta AV, então as suas coordenadas satisfazem a condição que define a reta AV. Assim:

$$\frac{2-x}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{z}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{2} = \frac{3-y}{3} \\ \frac{2-x}{2} = \frac{z}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{6} - 3x = \cancel{6} - 2y \\ 6 - 3x = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3y \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ 6 - 3x = z \end{cases}$$

Então, $g(x) = \frac{4}{3}xyz = \frac{4}{\cancel{3}}x \times \frac{\cancel{3}}{2}x \times (6 - 3x) = 2x^2(6 - 3x) = 12x^2 - 6x^3$

▪ $g'(x) = (12x^2 - 6x^3)' = 24x - 18x^2$

▪ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 18x^2 = 0 \Leftrightarrow x(24 - 18x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ 24 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{24}{18} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{4}{3}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g', vem:

x	0		$\frac{4}{3}$		2
$g'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
$g(x)$	n.d.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	n.d.

A função g tem máximo absoluto em $x = \frac{4}{3}$, logo o volume máximo da pirâmide é:

$$g\left(\frac{4}{3}\right) = 12 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 12 \times \frac{16}{9} - 6 \times \frac{64}{27} = \frac{64}{9}$$