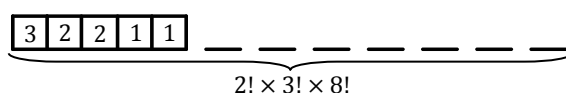


PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME-TIPO 5

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Agrupando num bloco a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Eduardo, o bloco e os restantes sete amigos permutam entre si de $8!$ maneiras. Como os cinco amigos de bloco têm de ficar sentados alternadamente por sexo, então a segunda e a quarta posições serão ocupadas por rapazes (portanto, podem-se sentar de $2!$ maneiras) e as primeira, terceira e quinta posições do bloco por raparigas (portanto, podem-se sentar de $3!$ maneiras). Logo, o número maneiras dos cinco amigos se sentarem é $2! \times 3!$. Portanto o número pedido é $2! \times 3! \times 8!$ (observa a figura seguinte).



Resposta: **B**

2. Como A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, assim:

$$1 - P\left(\overline{(A \cap B)} \mid B\right) = 1 - P\left(\overline{(A \cap B)} \mid B\right) = 1 - \frac{P(\overline{(A \cap B)} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap (B \cap \overline{B}))}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= 1 - \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\overline{A})$$

Resposta: **C**

3.

$$D_f = \underbrace{D_f \cap D_g}_{\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+} \cap \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \cap \{x \in \mathbb{R}: 9 \log_4 x \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \cap \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq 1\} =$$

$$= \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Cálculo Auxiliar: Para $x > 0$ tem-se, $g(x) = 0 \Leftrightarrow 9 \log_4 x = 0 \Leftrightarrow \log_4 x = 0 \Leftrightarrow x = 4^0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{3^2}{9 \log_4 2} = \frac{1}{\log_4 2} = \log_2 4 = 2. \text{ Assim:}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{3^3}{9 \log_4 3} = 3 \times \frac{1}{\log_4 3} = 3 \log_3 4 = \log_3 (4^3) = \log_3 64 = \log_3 (8^2) = 2 \log_3 8 =$$

$$= \left(\frac{f}{g}\right)(2) \times \log_3 8$$

Nota: Tem-se que $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, portanto, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

• Para $x > 0$ tem-se, $g(x) = 9 \Leftrightarrow 9 \log_4 x = 9 \Leftrightarrow \log_4 x = 1 \Leftrightarrow x = 4$. Portanto, como g é injetiva, vem $g^{-1}(9) = 4 = 3^{\log_3 4} = f(\log_3 4)$.

$$\begin{aligned}
 \bullet D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}^+\} = \{x \in \mathbb{R}: \underbrace{3^x \in \mathbb{R}^+}_{\substack{\text{Condição} \\ \text{Universal}}}\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R}: 3^x > 0\} = \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Portanto as opções **A**, **B** e **C** são verdadeiras e a opção **D** não é verdadeira.

Resposta: **D**

4. Os pontos $A(0, -2)$ e $B(3, 0)$ pertencem à reta r . Assim, $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}$ e portanto a equação reduzida da reta r é $y = \frac{2}{3}x - 2$ (assíntota do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$). Como a função g é par, então a reta de equação $y = -\frac{2}{3}x - 2$ é assíntota do gráfico de g , quando $x \rightarrow -\infty$. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x)$ é finito, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -\frac{2}{3}$. Assim:

$$\bullet a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) + \frac{2}{3}x \right) = -2$$

$$\bullet c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{g(x)} \times g'(x) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3} \right) = 1$$

$$\text{Portanto, } 9a + b - c = 9 \times \frac{2}{3} - 2 - 1 = 6 - 2 - 1 = 3.$$

Resposta: **D**

5. Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(f(x))}{2x} = \frac{\ln(0^+)}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty. \text{ Portanto exclui-se a opção } \mathbf{C}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(f(x))}{2x} = \frac{\overset{<0}{\ln(f(0))}}{0^+} = -\infty. \text{ Portanto exclui-se a opção } \mathbf{D}.$$

Nota: Como $0 < f(0) < 1$, vem que $\ln(f(0)) < 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{2x} = \frac{\ln(1)}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0. \text{ Portanto exclui-se a opção } \mathbf{B}.$$

Resposta: **A**

6. Tem-se que $h(0) = -2$:

Se $x \rightarrow 0^-$ então $-3x \rightarrow 0^+$ (limite notável)

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-3x}-1}{2x} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-3x}-1}{x} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-3x}-1}{-3x} = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \neq h(0)$ e portanto a função h não é contínua à esquerda do ponto 0.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \text{sen}(4x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(4x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{2}\right) - 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} = \frac{0}{2} - 2 \times 1 = -2$

Se $x \rightarrow 0^+$ então $4x \rightarrow 0^+$ (limite notável)

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ e portanto a função h é contínua à direita do ponto 0.

Portanto a função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sendo contínua apenas à direita do ponto 0.

Nota: Para $x < 0$ a função h é contínua pois é composição, diferença e quociente entre funções contínuas no seu domínio e para $x > 0$ a função h é contínua pelas mesmas razões.

Resposta: C

7. Um número real negativo pode ser representado na forma trigonométrica por $\rho \text{cis} \pi$, com $\rho \in \mathbb{R}^+$. Assim:

$$\sqrt[6]{\rho \text{cis} \pi} = \sqrt[6]{\rho} \text{cis} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right), \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

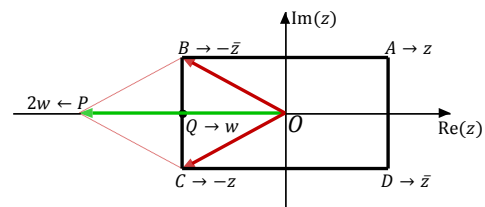
A raiz sexta que se obtém para $k = 1$ é $\sqrt[6]{\rho} \text{cis} \frac{\pi}{2}$, cuja imagem geométrica pertence à parte positiva do eixo imaginário. Das opções apresentadas, o único hexágono que tem um vértice na parte positiva do eixo imaginário é o da opção **B**.

Resposta: B

8. O ponto A é a imagem geométrica do número complexo z , portanto o ponto D é a imagem geométrica do número complexo \bar{z} , o ponto C é a imagem geométrica do número complexo $-z$ e o ponto B é a imagem geométrica do número complexo $-\bar{z} = -z$ (observa a figura).

Pela regra do paralelogramo tem-se:

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{OB} \Leftrightarrow 2\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{OB}$$



Assim, $2w = -z + (-\bar{z}) = -z - \bar{z}$

Resposta: B

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1.

$$\begin{aligned}
 1.1. w &= \frac{(z_2)^2 \times z_1 + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{(\sqrt{3} \operatorname{cis}\frac{\pi}{12})^2 \times 2i + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{3 \operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \times 2 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6 \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \\
 &= \frac{6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i + 6}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{6 \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) = 3 \operatorname{cis}\frac{13\pi}{6} = 3 \operatorname{cis}\frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$

Logo, $\arg(w) = \arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$, mas $|w| \neq |z_3|$ porque $|w| = 3$ e $|z_3| = 1$ e portanto $w \neq z_3$.

i) **Cálculo Auxiliar:** Para escrever $3 + 3\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica, vem: $|3 + 3\sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$. Sendo θ um argumento de $3 + 3\sqrt{3}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ e $\theta \in 1.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{3}$. Assim, $3 + 3\sqrt{3}i = 6 \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$.

1.2. Fazendo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, com $z \neq 0$, vem:

$$\begin{aligned}
 \frac{z^3 \times z_1}{|z|} + 4\bar{z} = 0 &\Leftrightarrow \frac{(\rho \operatorname{cis} \theta)^3 \times 2i}{\rho} + 4\rho \operatorname{cis}(-\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho^3 \operatorname{cis}(3\theta) \times 2 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{\rho} = -4\rho \operatorname{cis}(-\theta) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2\rho^2 \operatorname{cis}\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 4\rho \operatorname{cis}(\pi - \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho^2 = 4\rho \\ 3\theta + \frac{\pi}{2} = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho^2 - 4\rho = 0 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho(\rho - 2) = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se $\rho = 0$ então $z = 0$ que não é solução, pois $z \neq 0$. Se $\rho = 2$ e substituindo k por valores pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, obtém-se:

$$z = 2 \operatorname{cis}\frac{\pi}{8} \vee z = 2 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{8} \vee z = 2 \operatorname{cis}\frac{9\pi}{8} \vee z = 2 \operatorname{cis}\frac{13\pi}{8}$$

Portanto, o conjunto solução da condição $\frac{z^3 \times z_1}{|z|} + 4\bar{z} = 0 \wedge z \neq 0$ é $\left\{2 \operatorname{cis}\frac{\pi}{8}, 2 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{8}, 2 \operatorname{cis}\frac{9\pi}{8}, 2 \operatorname{cis}\frac{13\pi}{8}\right\}$.

2.

2.1. $P(Y|X)$ designa a probabilidade de o produto dos números das três fichas retiradas da caixa B ser zero, sabendo que as duas fichas retiradas de A e colocadas em B estão numeradas com o mesmo número. Assim, as fichas retiradas

da caixa A e colocadas na caixa B estão numeradas com o número 0 e portanto, para a segunda fase da experiência, ficam na caixa B sete fichas, duas numeradas com o número 0, três numeradas com o número 2 e duas numeradas com o número 3. Logo, o número de casos possíveis é 7C_3 (é o número de maneiras de retirar três fichas entre as sete da caixa B). Para o produto dos números das três fichas ser zero, pelo menos uma delas tem de estar numerada com o número 0, portanto o número de casos favoráveis é ${}^2C_1 \times {}^5C_2 + {}^2C_2 \times {}^5C_1$ (é o número de maneiras de retirar um ficha numerada com o número 0 entre as duas e das restantes cinco retirar-se duas ou retirar duas fichas numeradas com o número 0 entre as duas e das restantes cinco retirar-se uma).

Assim, pela lei de Laplace, $P(Y|X) = \frac{{}^2C_1 \times {}^5C_2 + {}^2C_2 \times {}^5C_1}{{}^7C_3} = \frac{5}{7}$.

2.2. De acordo com a experiência aleatória enunciada, as somas possíveis são:

- 4 (extraíndo uma ficha com o número 0 da caixa A e duas com o número 2 da caixa B), o resto da divisão inteira de 4 por 4 é 0;
- 5 (extraíndo a ficha com o número 1 da caixa A e duas fichas com o número 2 da caixa B ou extraíndo uma ficha com o número 0 da caixa A, uma com o número 2 da caixa B e uma com o número 3 da caixa B), o resto da divisão inteira de 5 por 4 é 1;
- 6 (extraíndo uma ficha com o número 0 da caixa A e as duas com o número 3 da caixa B ou extraíndo a ficha com o número 1 da caixa A, uma com o número 2 da caixa B e uma com o número 3 da caixa B), o resto da divisão inteira de 6 por 4 é 2;
- 7 (extraíndo a ficha com o número 1 da caixa A e as duas fichas com o número 3 da caixa B), o resto da divisão inteira de 7 por 4 é 3.

Portanto, a variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2 e 3, isto é $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Para qualquer valor da variável aleatória X o número de casos possíveis é ${}^3C_1 \times {}^5C_2 = 30$. Tem-se que:

- $P(X = 0) = P(\text{soma dos números das três fichas ser 4}) = \frac{{}^2C_1 \times {}^3C_2}{30} = \frac{1}{5}$
- $P(X = 1) = P(\text{soma dos números das três fichas ser 5}) = \frac{{}^1C_1 \times {}^3C_2 + {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1}{30} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 2) = P(\text{soma dos números das três fichas ser 6}) = \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_2 + {}^1C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1}{30} = \frac{4}{15}$
- $P(X = 3) = P(\text{soma dos números das três fichas ser 7}) = \frac{{}^1C_1 \times {}^2C_2}{30} = \frac{1}{30}$

Portanto, a tabela apresentada é a da distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

3. Consideremos o acontecimento A : «tinteiro tem um volume de tinta compreendido entre 42,07 mL e 42,21 mL».

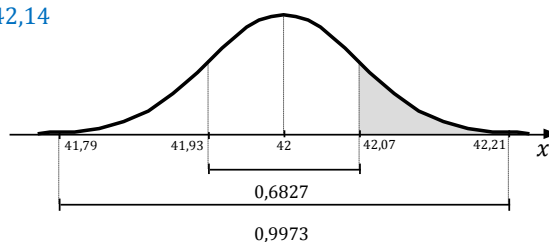
▪ A variável aleatória X : «volume de tinta, em ml, dos tinteiros» segue uma distribuição normal cujo valor médio vamos designar por μ e o desvio padrão por σ , isto é $N(\mu, \sigma)$. Tem-se que $P(41,86 < X < 42,14) = 95,45\%$ como o intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ é o único intervalo de amplitude 4σ em que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95,45\%$, vem que $\mu - 2\sigma = 41,86$ e $\mu + 2\sigma = 42,14$, portanto:

$$\mu = \frac{41,86+42,14}{2} = 42 \text{ e } \mu + 2\sigma = 42,14 \Leftrightarrow 42 + 2\sigma = 42,14 \Leftrightarrow \sigma = \frac{42,14-42}{2} \Leftrightarrow \sigma = 0,07$$

Nota: Os valores de μ e σ podem ser obtidos resolvendo o sistema $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 41,86 \\ \mu + 2\sigma = 42,14 \end{cases}$

Tem-se então que $\mu + \sigma = 42,07$ e $\mu + 3\sigma = 42,21$. Assim:

$$P(A) = P(42,07 < X < 42,21) = \frac{0,9973 - 0,6827}{2} = 0,1573$$



▪ Seja Y a variável aleatória «número de tinteiro tem um volume de tinta compreendido entre 42,07 mL e 42,21 mL num total de seis». Esta variável aleatória tem distribuição binomial de parâmetros $n = 6$ e $p = P(A) = 0,1573$, isto é $Y \sim \text{Bin}(6; 0,1573)$. Portanto, pretende-se determinar $P(Y \leq 1)$:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) = \\ &= {}^6C_0 \times (0,1573)^0 \times (1 - 0,1573)^6 + {}^6C_1 \times (0,1573)^1 \times (1 - 0,1573)^5 \approx 0,759 \end{aligned}$$

4.

4.1.

▪ Tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} A(5) = 3,31 \\ \frac{A(t+1)}{A(t)} = e^{-0,15} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \times b^{-0,15 \times 5} = 3,31 \\ \frac{a \times b^{-0,15(t+1)}}{a \times b^{-0,15t}} = e^{-0,15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times b^{-0,75} = 3,31 \\ b^{-0,15t-0,15+0,15t} = e^{-0,15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b^{-0,15} = e^{-0,15} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b^{-0,15} = e^{-0,15} \quad b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times e^{-0,75} = 3,31 \\ b = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3,31}{e^{-0,75}} \\ b = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 7 \\ b = e \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $a \approx 7$ e $b = e$.

- Tem-se que $\frac{A(t+1)}{A(t)} = e^{-0,15} \approx 0,86$.

A massa do elemento radioativo A reduz-se 14% por ano ($100\% - 86\% = 14\%$).

4.2. Tem-se:

$$\begin{aligned} A(t) - B(t) = 2 &\Leftrightarrow 7e^{-0,15t} - 3e^{-0,3t} = 2 \Leftrightarrow -3e^{-0,3t} + 7e^{-0,15t} - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3(e^{-0,15t})^2 + 7e^{-0,15t} - 2 = 0 \end{aligned}$$

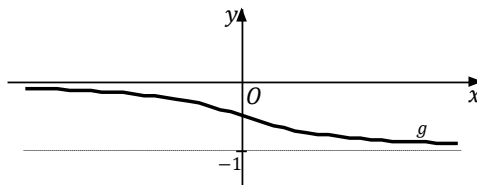
Fazendo $y = e^{-0,15t}$ vem:

$$\begin{aligned} -3y^2 + 7y - 2 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \vee y = 2 \underset{y=e^{-0,15t}}{\Leftrightarrow} e^{-0,15t} = \frac{1}{3} \vee e^{-0,15t} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,15t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \vee -0,15t = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0,15} \approx 7,324 \vee t = \frac{\ln 2}{-0,15} \approx -4,621 \end{aligned}$$

Logo, $t \approx 7,324$ e portanto a diferença entre a massa da amostra do elemento radioativo A e a massa da amostra do elemento radioativo B é de 2 mg passados, aproximadamente, sete anos e quatro meses ($0,324 \times 12 \approx 4$).

5. Seguindo a sugestão, vamos provar que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $[0, 2]$. Provando que a função h tem pelo menos um zero, fica provado que 0 pertence ao contradomínio de h . Tem-se:

- $f(0) \times f(2) < 0 \Rightarrow f(0)$ e $f(2)$ têm sinais contrários.
- Como g é estritamente decrescente em \mathbb{R} e as retas de equações $y = -1$ e $y = 0$ são assintotas do seu gráfico vem que $D'_g =]-1, 0[$, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < g(x) < 0$ (na figura abaixo está uma possível representação gráfica da função g).



- $h(x) = \frac{f(x) \times g(x) + f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \times (g(x) + 1)}{g(x)} = f(x) \times \frac{g(x) + 1}{g(x)}$. Assim, como $-1 < g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, vem $0 < g(x) + 1 < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e portanto $\frac{g(x) + 1}{g(x)} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A função h é contínua em \mathbb{R} , pois é produto, soma e quociente entre funções contínuas em \mathbb{R} , logo h é contínua em $]0, 2[\subset \mathbb{R}$. Tem-se:

$$h(0) = f(0) \times \underbrace{\frac{g(0)+1}{g(0)}}_{<0} \quad \text{e} \quad h(2) = f(2) \times \underbrace{\frac{g(2)+1}{g(2)}}_{<0}$$

Logo, como $f(0)$ e $f(2)$ têm sinais contrários então $h(0)$ e $h(2)$ também têm sinais contrários e portanto pelo corolário do teorema de Bolzano $\exists c \in]0, 2[: h(c) = 0 \Rightarrow 0$ pertence ao contradomínio da função h .

Outra resolução:

A função f é contínua em \mathbb{R} . Logo, f também é contínua em $]0, 2[\subset \mathbb{R}$ e portanto, como $f(0) \times f(2) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano $\exists c \in]0, 2[: f(c) = 0$.

Assim, como $-1 < g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (provado na primeira resolução), este $c \in]0, 2[$ também é zero da função h , pois:

$$h(c) = \frac{f(c) \times g(c) + f(c)}{g(c)} = \frac{0 \times g(c) + 0}{g(c)} = \frac{0}{\underbrace{g(c)}_{\neq 0}} = 0$$

Ou seja, a função h tem pelo menos um zero em $]0, 2[\Rightarrow 0$ pertence ao contradomínio da função h .

6. Tem-se $g(x) = (-6x - 6) \ln(x^2 + 2x + 1) + x^3 = (-6x - 6) \ln((x + 1)^2) + x^3$, assim:

$$\begin{aligned} \bullet \quad g'(x) &= -6 \ln((x + 1)^2) + (-6x - 6) \times \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + 3x^2 = -6 \ln((x + 1)^2) - 6(x + 1) \times \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + 3x^2 = \\ &= -6 \ln((x + 1)^2) - \frac{12(x+1)^2}{(x+1)^2} + 3x^2 = -6 \ln((x + 1)^2) - 12 + 3x^2 \end{aligned}$$

$$g''(x) = -6 \times \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + 6x = \frac{-12}{x+1} + 6x = \frac{6x^2+6x-12}{x+1}$$

$$\bullet \quad g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 1) \wedge x \neq -1$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'' , vem:

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$6x^2 + 6x - 12$	+	0	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+
$g''(x)$	-	0	+	n.d.	-	0	+
$g(x)$	\cap	p.i.	\cup	n.d.	\cap	p.i.	\cup

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2]$ e em $]-1, 1]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-2, -1[$ e em $[1, +\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x = -2$ e em $x = 1$.

7.

7.1.

• Tem-se $g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = -\frac{1}{2}\cos(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(0) + \sin(0)\right) = \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = 2$. Assim a área colorida da figura é dada por $A_{[AOB]} - \left(g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)\right) = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} - 2$.

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, vem $x = \frac{\pi}{2}$ e portanto $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow \overline{OB} = \frac{\pi}{2}$.

A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A , assim $m_t = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, como $f'(x) = 2 \cos(2x) - \sin x$, vem:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

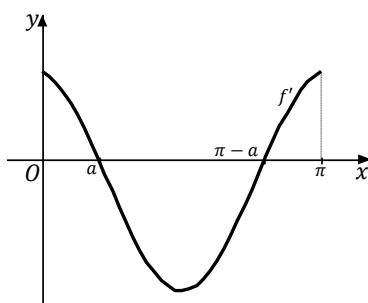
Assim, a equação reduzida da reta t é do tipo $y = -3x + b$ e como o ponto $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pertence à reta t , tem-se:

$$0 = -3 \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{3\pi}{2}$$

Logo, a equação reduzida da reta t é $y = -3x + \frac{3\pi}{2}$ e portanto $A\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \overline{OA} = \frac{3\pi}{2}$.

$$\therefore A_{\text{colorida}} = \frac{\overline{OB} \times \overline{OA}}{2} - 2 = \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{3\pi}{2}}{2} - 2 = \frac{\frac{3\pi^2}{4}}{2} - 2 = \frac{3\pi^2}{8} - 2 = \frac{3\pi^2 - 16}{8}$$

7.2. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f'(x) = 2 \cos(2x) - \sin x$ na janela de visualização $[0, \pi] \times [-3, 3]$.



Fazendo um quadro de variação do sinal da função f' , vem:

x	0		a		$\pi - a$		π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	min.	↗	máx.	↘	min.	↗	máx.

A função f é decrescente em $[a, \pi - a]$, é crescente em $[0, a]$ e em $[\pi - a, \pi]$, tem um mínimo relativo em $x = 0$ e em $x = \pi - a$ e tem um máximo relativo em $x = a$ e em $x = \pi$, em que $a \approx 0,63$ e $\pi - a \approx 2,51$.

8.

▪ Tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 6z + 13 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 2^2}{(x-2)^2} + \frac{y^2 - 6y + 3^2}{(y-3)^2} + \frac{z^2 - 6z + 3^2}{(z-3)^2} &\leq -13 + 2^2 + 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 &\leq 3^2 \end{aligned}$$

Logo, a esfera tem centro no ponto de coordenadas $(2,3,3)$ e raio 3. Assim, como uma das arestas verticais do prisma é um dos diâmetros da esfera, conclui-se que essa aresta só pode ser a aresta $[BF]$ (é a única aresta vertical do prisma cujo ponto médio pode ter coordenadas $(2,3,3)$). Portanto as coordenadas do ponto B são $(2,3,0)$, as coordenadas do ponto F são $(2,3,6)$ e a altura do prisma é 6.

- O ponto P é o ponto de interseção entre os planos ABF , EFG ($z = 6$) e BGP . Assim podemos determinar as suas coordenadas resolvendo um sistema formado pelas equações dos três planos. Tem-se:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ z = 6 \\ 18x + 3y + 4z - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 6 \\ 18x + 3 \times (2x - 1) + 4 \times 6 - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 18x + 3x - 3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 24x = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times 1 - 1 \\ z = 6 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 6 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo as coordenadas do ponto P são $(1,1,6)$.

- O ponto G pertence ao plano BGP , tem abcissa igual a 0 e cota igual a 6, ou seja, as suas coordenadas são da forma $(0, y, 6)$. Assim, substituindo-as na equação do plano BGP , vem:

$$18 \times 0 + 3y + 4 \times 6 - 45 = 0 \Leftrightarrow 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$$

Logo as coordenadas do ponto G são $(0,7,6)$.

- O ângulo PBG é o ângulo entre os vetores \overrightarrow{BP} e \overrightarrow{BG} . Seja α a amplitude do ângulo PBG . Assim tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BG}}{\|\overrightarrow{BP}\| \times \|\overrightarrow{BG}\|} = \frac{(-1, -2, 6) \cdot (-2, 4, 6)}{\|(-1, -2, -6)\| \times \|(2, 4, 6)\|} = \frac{-1 \times (-2) + (-2) \times 4 + 6 \times 6}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 6^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 6^2}} = \frac{30}{\sqrt{41} \times \sqrt{56}} = \frac{30}{\sqrt{2296}}$$

Portanto, $\cos \alpha = \frac{30}{\sqrt{2296}}$. Assim, como $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ então, $PBG = \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{30}{\sqrt{2296}}\right) \approx 51,2^\circ$.

Cálculos auxiliares: $\overrightarrow{BP} = P - B = (1,1,6) - (2,3,0) = (-1, -2, 6)$; $\overrightarrow{BG} = G - B = (0,7,6) - (2,3,0) = (-2, 4, 6)$.