PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME–TIPO 6

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Tem-se, $\log_b(a^5) + x = a^{\log_a 15 + 3\log_a 2} \underset{a=b^3}{\Leftrightarrow} x = a^{\log_a 15} \times a^{3\log_a 2} - \log_b((b^3)^5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 15a^{\log_a(2^3)} - \log_b(b^{15}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \times 8 - 15 \Leftrightarrow x = 105$$

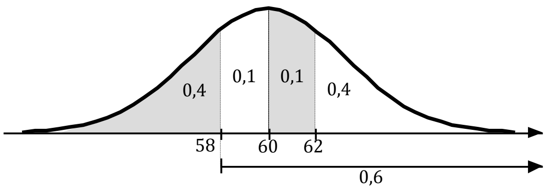
Assim, $y = -455\log_b\left(\frac{1}{b}\right) + x \Leftrightarrow y = -455\log_b(b^{-1}) + 105 \Leftrightarrow y = -455 \times (-1) + 105 \Leftrightarrow y = 560.$

Resposta: B

2. Considere-se a variável aleatória X: «peso dos alunos do 12.º ano» ($X \sim \mathrm{N}(60, \sigma)$) e os acontecimentos A: «o aluno escolhido pesa entre 60 kg e 62 kg» e B: «o aluno escolhido pesa pelo menos 58 kg». Assim:

$$P(A) = P(60 \leq X \leq 62) \quad \text{e} \quad P(B) = P(X \geq 58)$$

Observa a figura seguinte:



Pretende-se determinar $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Tem-se que $P(A \cap B) \underset{A \subset B}{=} P(A) = P(60 \leq X \leq 62) = 0{,}1$ e $P(B) = P(X \geq 58) = 0{,}6$. Logo, $P(A|B) = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$.

Resposta: C

3. A superfície esférica de equação $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ tem centro no ponto C de coordenadas $(-2,0,1)$. O plano α é tangente à superfície esférica no ponto A de coordenadas $(-3,1,2)$, assim, vamos utilizar o produto escalar para determinar uma condição que defina α. Seja $P(x,y,z)$ um ponto do espaço pertencente ao plano α. A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ define o plano α. Assim:

$$\alpha: \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x+3, y-1, z-2) \cdot (1,-1,-1) = 0 \Leftrightarrow x + 3 - y + 1 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - y - z = -6$$

Cálculos auxiliares: $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (-3,1,2) = (x + 3, y - 1, z - 2)$; $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,1) - (-3,1,2) = (1, -1, -1)$

Portanto, $\vec{n}_\alpha = (1, -1, -1)$ é um vetor normal de α. Para se concluir que uma reta r está contida no plano α, basta verificar que o vetor diretor da reta r é perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$ e que um dos pontos de r pertence ao plano α, ou seja, tem de satisfazer a equação que define o plano α (se um dos pontos de r não pertencer a α, então a reta r não está contida no plano α). Assim:

- A reta definida por $(x, y, z) = (-3,1,2) + k(6,4,1)$, $k \in \mathbb{R}$ não está contida em α pois o seu vetor diretor pode ser $\vec{u} = (6,4,1)$ e $\vec{u} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = (6,4,1) \cdot (1, -1, -1) = 6 - 4 - 1 = 1$. Portanto, $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$ e portanto $\vec{u}$ não é perpendicular a $\vec{n}_\alpha$.

- A reta definida por $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{4-z}{2}$ não está contida em α pois o ponto de coordenadas $(0,0,4)$ pertence a esta reta mas pertence ao plano α, visto que $0 - 0 - 4 = -6 \Leftrightarrow -4 = -6$ é uma proposição falsa. Portanto, o ponto de coordenadas $(0,0,4)$ não satisfaz a equação de α.

- A reta definida por $(x, y, z) = (1,0,6) + k(4,0,3)$, $k \in \mathbb{R}$ não está contida em α pois o ponto de coordenadas $(1,0,6)$ pertence a esta reta mas não pertence ao plano α, visto que $1 - 0 - 6 = -6 \Leftrightarrow -5 = -6$ é uma proposição falsa. Portanto, o ponto de coordenadas $(1,0,6)$ não satisfaz a equação de α (Além disso um vetor diretor desta reta pode ser $\vec{u} = (4,0,3)$ e $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha = (4,0,3) \cdot (1, -1, -1) = 4 - 0 - 3 = 1$. Portanto, $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$ e portanto $\vec{u}$ não é perpendicular a $\vec{n}_\alpha$).

- Um vetor diretor da reta definida por $x = z \quad \wedge \quad y = 6$ pode ser $\vec{u} = (1,0,1)$ e o ponto de coordenadas $(0,6,0)$ pertence a esta reta. O vetor $\vec{u}$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$ pois $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha = (1,0,1) \cdot (1, -1, -1) = 1 - 0 - 1 = 0$. O ponto de coordenadas $(0,6,0)$ pertence ao plano α porque $0 - 6 - 0 = -6 \Leftrightarrow -6 = -6$ é uma proposição verdadeira. Portanto, o ponto de coordenadas $(0,6,0)$ satisfaz a equação de α. Logo a condição $x = z \quad \wedge \quad y = 6$ pode definir a reta r.

Resposta: D

4. Tem-se $\lim x_n = \lim(-n^2 \times 3^{-n}) = -\lim \frac{n^2}{3^n} = 0^-$. Portanto, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim h(x_n) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(-x+1)}{-x} = -1$$

Se $x \to 0^-$ então $-x \to 0^+$ (limite notável)

Resposta: A

5.

▪ A afirmação **I** é verdadeira pois:

$$(-1)^n \times n^2 = -n^2 \to -\infty, \text{ se } n \text{ é ímpar} \quad \text{e} \quad (-1)^n \times n^2 = n^2 \to +\infty, \text{ se } n \text{ é par}$$

Logo, como a função f é contínua em IR, pelo teorema de Bolzano pode-se concluir que $D'_f = \mathrm{IR}$ e portanto para todo o $c \in \mathrm{IR}$, existe pelo menos um $x \in \mathrm{IR}$ tal que $f(x) = c$, ou seja a equação $f(x) = c$ é possível em IR, $\forall\, c \in \mathrm{IR}$.

▪ A afirmação **II** também é verdadeira. De facto, sendo k um número natural, tem-se que f é contínua em $[k, k+1]$, pois é contínua em IR. Como, para todo o $k \in \mathrm{IN}$, $f(k)$ e $f(k+1)$ têm sinais contrários, então pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo menos um $c \in \,]k, k+1[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função f tem pelo menos um zero em cada intervalo da forma $]k, k+1[$ e portanto tem infinitos zeros.

Cálculos auxiliares:

▪ Se k é par então $k+1$ é ímpar, então:

$$f(k) = (-1)^k \times k^2 = k^2 \Longrightarrow f(k) > 0 \quad \text{e} \quad f(k+1) = (-1)^{k+1} \times (k+1)^2 = -(k+1)^2 \Longrightarrow f(k+1) < 0$$

▪ Se k é ímpar então $k+1$ é par, então:

$$f(k) = (-1)^k \times k^2 = -k^2 \Longrightarrow f(k) < 0 \quad \text{e} \quad f(k+1) = (-1)^{k+1} \times (k+1)^2 = (k+1)^2 \Longrightarrow f(k+1) > 0$$

Portanto, para todo o $k \in \mathrm{IN}$, $f(k)$ e $f(k+1)$ têm sinais contrários.

▪ A afirmação **III** é falsa. Considerando a função $g(x) = f(x) - f(2x)$ tem-se que f é contínua em IR, logo é contínua em $[1, 2] \subset \mathrm{IR}$. $g(1)$ e $g(2)$ têm o mesmo sinal e portanto o teorema de Bolzano não permite concluir sobre a existência de zeros da função g em $[1, 2]$ e consequentemente não é possível concluir se a equação $f(x) = f(2x)$ é possível ou impossível em $[1, 2]$. Assim, a afirmação não é necessariamente verdadeira.

Cálculos auxiliares:

$$g(1) = f(1) - f(2) = (-1)^1 \times 1^2 - (-1)^2 \times 2^2 = -5 \quad \text{e} \quad g(2) = f(2) - f(4) = (-1)^2 \times 2^2 - (-1)^4 \times 4^2 = -12$$

Resposta: D

6. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, onde $f(a) = 3$, logo $m_r = f'(a)$. Assim, vem:

▪ $f(a) = 3 \Leftrightarrow 3 + 2\ln(a-1) = 3 \Leftrightarrow 2\ln(a-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(a-1) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow a = 2$

▪ $f'(x) = \frac{2}{x-1}$

Logo, $m_r = f'(2) = \frac{2}{2-1} = 2$. Assim, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e portanto $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 1{,}11$ rad.

Resposta: B

7. As raízes de índice 8 de w são dadas por $\sqrt[8]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{8}\right)$, $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Como os pontos A e B são as imagens geométricas de duas raízes de índice 8 de w vem que $\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$ e que $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Logo, $A_{\text{setor}AOB} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \times 2 = \frac{\pi}{4}$.

Resposta: B

8. Fazendo $z = \rho \operatorname{cis}\theta$ e $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$, vem:

$$\frac{z^{n+2}}{(\bar{z})^n} = z_1 \Leftrightarrow \frac{(\rho \operatorname{cis}\theta)^{n+2}}{\left(\rho\operatorname{cis}(-\theta)\right)^n} = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1) \Leftrightarrow \frac{\rho^{n+2}\operatorname{cis}(\theta n + 2\theta)}{\rho^n \operatorname{cis}(-\theta n)} = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}(2\theta n + 2\theta) = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1) \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}\big(\theta(2n+2)\big) = \rho_1\operatorname{cis}(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \rho_1 \\ \theta(2n+2) = \theta_1 + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \pm\sqrt{\rho_1} \\ \theta = \frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2k\pi}{2n+2}, \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para $k = 0$ vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2}\right)$

Para $k = 1$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+2\pi}{2n+2}\right)$

⋮

Para $k = n$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2n\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+2n\pi}{2n+2}\right)$

⋮

Para $k = 2n$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\times 2n\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+4n\pi}{2n+2}\right)$

Para $k = 2n+1$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\times(2n+1)\pi}{2n+2}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1+(4n+2)\pi}{2n+2}\right)$

Para $k = 2n+2$, vem $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2\times\cancel{(2n+2)}\pi}{\cancel{2n+2}}\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + 2\pi\right) = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2}\right)$

Logo as soluções da equação $\frac{z^{n+2}}{(\bar{z})^n} = z_1$ são da forma $z = \sqrt{\rho_1}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_1}{2n+2} + \frac{2k\pi}{2n+2}\right)$, com $k \in \{0, 1, 2 \dots, n, \dots, 2n, 2n+1\}$, portanto a equação tem $2n+2$ soluções (a partir de $k = 2n+2$ as soluções repetem-se).

Resposta: D

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.

1.1. Tem-se:

$$z_1=\frac{(1-\sqrt{3}i)^5\times\left(\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^{21}+16\sqrt{3}}{i^{3-16n}\times\text{cis}(-2\beta)}\underset{i)}{=}\frac{\left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5\times i^{21}+16\sqrt{3}}{i^3\times i^{-16n}\times\text{cis}(-2\beta)}=\frac{2^5\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\times i^{4\times5+1}+16\sqrt{3}}{-i\times i^{4\times(-4n)}\times\text{cis}(-2\beta)}=$$

$$=\frac{32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)\times i+16\sqrt{3}}{-i\times1\times\text{cis}(-2\beta)}=\frac{32\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times i+16\sqrt{3}}{-i\times\text{cis}(-2\beta)}=\frac{(16+16\sqrt{3}i)\times i+16\sqrt{3}}{-i\times\text{cis}(-2\beta)}=\frac{16i+16\sqrt{3}i^2+16\sqrt{3}}{-i\times\text{cis}(-2\beta)}$$

$$=\frac{16i-16\sqrt{3}+16\sqrt{3}}{-i\times\text{cis}(-2\beta)}=\frac{16i}{-i\times\text{cis}(-2\beta)}=-\frac{16}{\text{cis}(-2\beta)}=\frac{16\text{cis}(0)}{\text{cis}(-2\beta)}=-16\text{cis}(0+2\beta)=-16\text{cis}(2\beta)$$

i) Cálculo auxiliar: Para escrever $1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica vem, $|1-\sqrt{3}i|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Sendo θ um argumento de $1-\sqrt{3}i$, tem-se $\text{tg}\,\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ e $\theta\in 4.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta=-\frac{\pi}{3}$. Assim, $1-\sqrt{3}i=2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Tem-se $\text{sen}\,\beta=\frac{1}{4}$, assim:

$$\text{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1\Leftrightarrow\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\Leftrightarrow\cos^2\beta=\frac{15}{16}\Leftrightarrow\cos\beta=\pm\sqrt{\frac{15}{16}}.$$

Como $\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, vem $\cos\beta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$. Logo:

$$z_1=-16\text{cis}(2\beta)=-16\left(\cos(2\beta)+i\text{sen}(2\beta)\right)=-16(\cos^2\beta-\text{sen}^2\beta+2i\,\text{sen}\,\beta\cos\beta)=$$

$$=-16\left(\frac{15}{16}-\frac{1}{16}+2i\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right)-16\left(\frac{14}{16}-\frac{2\sqrt{15}}{16}i\right)=-14+2\sqrt{15}i$$

1.2. Para $\beta=\frac{\pi}{4}$ tem-se $z_1=-16\text{cis}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=-16\text{cis}\frac{\pi}{2}=-16i$. Assim vem:

$$\left(1\leq\left|-z+\frac{z_1}{8}\right|\leq2\;\wedge\;\text{Re}(z+iz)\geq2\right)\;\vee\;\text{Im}(\bar{z})<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1\leq\left|-z+\frac{-16i}{8}\right|\leq2\;\wedge\;\text{Re}(z+iz)\geq2\right)\;\vee\;\text{Im}(\bar{z})<0$$

$$\Leftrightarrow(1\leq|-z-2i|\leq2\;\wedge\;\text{Re}(z+iz)\geq2)\;\vee\;\text{Im}(\bar{z})<0$$

$$\Leftrightarrow(1\leq|z+2i|\leq2\;\wedge\;\text{Re}(z+iz)\geq2)\;\vee\;\text{Im}(\bar{z})<0$$

▪ A condição $1 \leq |z + 2i| \leq 2$ representa o conjunto de pontos do plano complexo situados entre as circunferências centradas no ponto $A(0, -2)$, afixo do número complexo $-2i$, e raios 1 e 2, fronteiras incluídas (a região representada pela condição é uma coroa circular).

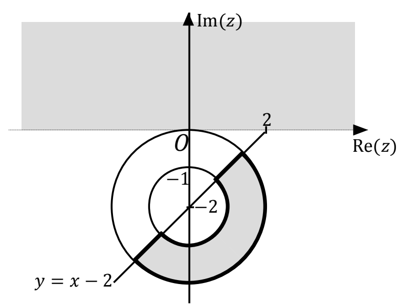
Fazendo $z = x + yi$, com $x, y \in \mathrm{IR}$, vem:

▪ $\mathrm{Re}(z + iz) \geq 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\big(x + yi + i(x + yi)\big) \geq 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x + yi + xi + yi^2) \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\big(x - y + i(y + x)\big) \geq 2 \Leftrightarrow x - y \geq 2 \Leftrightarrow -y \geq 2 - x \Leftrightarrow y \leq x - 2$$

▪ $\mathrm{Im}(\bar{z}) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(x - yi) < 0 \Leftrightarrow -y < 0 \Leftrightarrow y > 0.$

A região do plano definida pela condição é:



2. Sejam $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ um número complexo não nulo e (z_k), a sucessão das raízes índice n de z, com $n \geq 2$. Assim, tem-se que:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}.$$

(z_k) é uma progressão geométrica de razão $\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$, pois:

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\sqrt[n]{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n}\right)}{\sqrt[n]{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi+2\pi}{n}\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi+2\pi}{n} - \frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi+2\pi-\theta-2k\pi}{n}\right) = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$$

Portanto, a soma das n raízes índice n de z é dada por:

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = z_0 \times \frac{1-\left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}\right)^n}{1-\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} = z_0 \times \frac{1-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\times n\right)}{1-\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} = z_0 \times \frac{1-\operatorname{cis}2\pi}{1-\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} = z_0 \times \frac{1-1}{1-\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} = z_0 \times \frac{0}{1-\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} = 0$$

3.

3.1. Para n para ou para n ímpar, o número de casos possíveis é ${}^{2n}C_3$ (é o número de maneiras de escolher três entre os $2n$ vértices do prisma). O plano xOy é o plano de equação $z = 0$, pelo que, se n é par existem $\frac{n-2}{2}$ planos estritamente paralelos a xOy que podem ser definidos com vértices do prisma, e se n é ímpar existem $\frac{n-3}{2}$ planos estritamente paralelos a xOy que podem ser definidos com vértices do prisma. Como cada um desses planos contém quatro vértices do prisma, então para n par o número de casos favoráveis $\frac{n-2}{2} \times {}^4C_3$ e para n ímpar é $\frac{n-3}{2} \times {}^4C_3$.
Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer um dos vértices do prisma tem igual probabilidade de ser escolhido, a regra de Laplace pode ser aplicada a este problema. Assim, probabilidade pedida é $\frac{\frac{n-2}{2}\times {}^4C_3}{{}^{2n}C_3} = \frac{(n-2)\times {}^4C_3}{2\times {}^{2n}C_3}$ se n é par e $\frac{\frac{n-3}{2}\times {}^4C_3}{{}^{2n}C_3} = \frac{(n-3)\times {}^4C_3}{2\times {}^{2n}C_3}$ se n é ímpar.

3.2. Considere-se a variável aleatória X: «número de vezes que sai face pintada de azul em seis repetições da experiência». A variável aleatória X segue uma distribuição binomial de parâmetros $n = 6$ e $\frac{p}{n}$, isto é, $X \sim \text{Bin}\left(6, \frac{p}{n}\right)$ (como se pode ou não escolher a mesma face, em cada uma das seis repetições da experiência a probabilidade de se escolher uma face pintada de azul é sempre $\frac{p}{n}$). Pretende-se determinar a probabilidade do acontecimento «escolher face pintada de azul» ocorrer no mínimo duas vezes e no máximo quatro vezes, isto é, $P(2 \leq X \leq 4)$.

Assim:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$= {}^6C_2 \times \left(\frac{p}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{p}{n}\right)^4 + {}^6C_3 \times \left(\frac{p}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{p}{n}\right)^3 + {}^6C_4 \times \left(\frac{p}{n}\right)^4 \left(1 - \frac{p}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{p}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{p}{n}\right)^2 \times \left(15 \times \left(1 - \frac{p}{n}\right)^2 + 20 \times \left(\frac{p}{n}\right)\left(1 - \frac{p}{n}\right) + 15 \times \left(\frac{p}{n}\right)^2\right)$$

$$= \frac{p^2}{n^2} \times \frac{(n-p)^2}{n^2} \times \left(15 \times \frac{(n-p)^2}{n^2} + 20 \times \frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n} + 15 \times \frac{p^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{p^2 \times (n-p)^2}{n^4} \times \left(\frac{15(n-p)^2}{n^2} + \frac{20np - 20p^2}{n^2} + \frac{15p^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\left(np - p^2\right)^2}{n^4} \times \frac{15n^2 - 30np + 15p^2 + 20np - 20p^2 + 15p^2}{n^2} = \frac{\left(np - p^2\right)^2 \left(15n^2 - 10np + 10p^2\right)}{n^6}$$

4. Tem-se:

$$P(\bar{B}) \times (1 - P(A|B)) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{P(\bar{B})} - P(\bar{B}) \times P(A|B) + P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A}) + \cancel{P(\bar{B})}$$

$$\Leftrightarrow -(1 - P(B)) \times P(A|B) + 1 - P(A \cap B) = P(\bar{A})$$

$$\Leftrightarrow (P(B) - 1) \times P(A|B) + \cancel{1} - P(A \cap B) = \cancel{1} - P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(B) \times P(A|B) - P(A|B) - P(A \cap B) = -P(A)$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow} \cancel{P(A \cap B)} - P(A|B) - \cancel{P(A \cap B)} = -P(A)$$

$$\Leftrightarrow -P(A|B) = -P(A) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ independentes}$$

i) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$

5.

5.1. Tem-se que $D_g = \{x \in \mathrm{IR}: x \neq 0\} = \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

▪ Assíntotas verticais

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} - 2x\right) = e^{\frac{1}{0^-}} - 2 \times 0 = e^{-\infty} - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} - 2x\right) = e^{\frac{1}{0^+}} - 2 \times 0 = e^{+\infty} - 0 = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função g. Como a função g é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 2\right) = \frac{e^{\frac{1}{-\infty}}}{-\infty} - 2 = \frac{e^0}{-\infty} - 2 = \frac{1}{-\infty} - 2 =$$

$$= 0 - 2 = -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - 2x + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-2x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 2\right) = \frac{e^{\frac{1}{+\infty}}}{+\infty} - 2 = \frac{e^0}{+\infty} - 2 = \frac{1}{+\infty} - 2 =$$

$$= 0 - 2 = -2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - 2x + 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$.

5.2. Tem-se $e^{\frac{2}{x}} - \cancel{2x} = g(x) + 2 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x}} - \cancel{2x} = e^{\frac{1}{x}} - 2x + 2 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2 - e^{\frac{1}{x}} - 2 = 0$

Fazendo $y = e^{\frac{1}{x}}$ vem:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \ \vee \ y = 2 \underset{y=e^{\frac{1}{x}}}{\Leftrightarrow} \underbrace{e^{\frac{1}{x}} = -1}_{\text{eq. impossível}} \ \vee \ e^{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2} \underset{1=\ln e}{\Leftrightarrow} x = \frac{\ln e}{\ln 2} \underset{i)}{\Leftrightarrow} x = \log_2 e$$

i) Mudança de base: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_a b}$, com $a, b \in \mathrm{IR}^+\backslash\{1\}$ e $x \in \mathrm{IR}^+$

5.3. Tem-se:

- $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} - 2 = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 2$

$$g''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= 2x\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}\times(2x+1)$$

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}\times(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = 0}_{\text{eq. impossível em IR}\backslash\{0\}} \ \vee \ 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
i) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$	$+$	$+$	$+$	n.d.	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	n.d.	$+$
$g(x)$	$\cap$	p.i.	$\cup$	n.d.	$\cup$

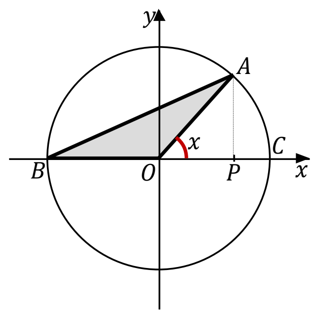
i) Observa que $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} > 0, \forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$, porque $e^{\frac{1}{x}} > 0$ e $x^4 > 0, \forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e em $]0, +\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x = -\frac{1}{2}$.

6.

6.1.

- Seja P o ponto de interseção do eixo Ox com a reta que contém o ponto A e é paralela ao eixo Oy, como representado na figura.



Tem-se:

$$p(x) = P_{[OAB]} = \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{AB} = 2 + 2 + \overline{AB} = 4 + \overline{AB}$$

Tem-se $B(-2, 0)$ e como $\cos x = \frac{\overline{OP}}{2} \Leftrightarrow \overline{OP} = 2\cos x$ e $\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AP}}{2} \Leftrightarrow \overline{AP} = 2\operatorname{sen} x$, vem que as coordenadas do ponto A são $(2\cos x, 2\cos x)$.

Assim:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2\cos x + 2)^2 + (2\operatorname{sen} x - 0)^2} = \sqrt{4\cos^2 x + 8\cos x + 4 + 4\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \sqrt{4\underbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}_{1} + 8\cos x + 4} = \sqrt{4 \times 1 + 8\cos x + 4}$$

$$= \sqrt{8 + 8\cos x} = \sqrt{4(2 + 2\cos x)} = \sqrt{4} \times \sqrt{2 + 2\cos x} = 2\sqrt{2 + 2\cos x}$$

Portanto, $p(x) = P_{[OAB]} = 4 + \overline{AB} = 4 + 2\sqrt{2 + 2\cos x}$.

▪ Tem-se

$$p'(x) = \left(4 + 2\sqrt{2 + 2\cos x}\,\right)' = \left(4 + 2(2 + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}\right)' = 2 \times \frac{1}{2} \times (2 + 2\cos x)^{\frac{1}{2}-1} \times (2 + 2\cos x)' =$$

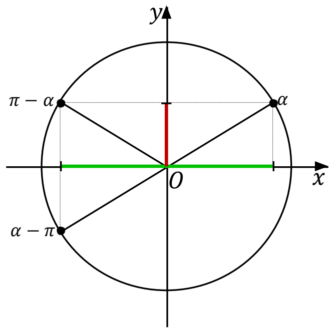
$$= (2 + 2\cos x)^{-\frac{1}{2}} \times (-2\,\mathrm{sen}\,x) = \frac{1}{(2+2\cos x)^{\frac{1}{2}}} \times (-2\,\mathrm{sen}\,x) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{2+2\cos x}}$$

Assim:

$$\frac{p'(\pi-\alpha)}{p(\alpha-\pi)-4} = \frac{-\frac{2\mathrm{sen}(\pi-\alpha)}{\sqrt{2+2\cos(\pi-\alpha)}}}{4+2\sqrt{2+2\cos(\alpha-\pi)}-4} \underset{i)}{=} \frac{-\frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}}{2\sqrt{2-2\cos\alpha}} = \frac{-2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\left(\sqrt{2-2\cos\alpha}\right)^2} = -\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{2-2\cos\alpha} \underset{ii)}{=} -\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2-2\times\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cálculos auxiliares:

i)



$\mathrm{sen}(\pi - \alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$

ii) Tem-se que $\mathrm{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$, assim:

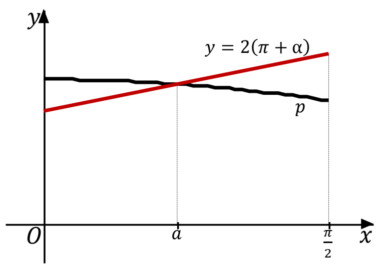
$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vem $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Tem-se que $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, pelo que $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\alpha \times \mathrm{tg}\,\alpha$. Assim:

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\alpha \times \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

6.2. A amplitude, em radianos, do arco BDA é $\pi + x$, portanto o seu comprimento é igual a $2(\pi + x)$. Pretende-se determinar o valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de modo que $p(x) = 2(\pi + x)$. Utilizando o editor de funções da calculadora, definem-se as funções $y_1 = p(x)$ e $y_2 = 2(\pi + x)$ na janela de visualização $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 10]$.



Logo, $p(x) = 2(\pi + x) \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 0{,}73$.

7. A função f é contínua em $x=-1$ se e só se $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)$. Assim:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{\cos(x+1)-1}{x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-1^-}\frac{(\cos(x+1)-1)(\cos(x+1)+1)}{(x+1)(\cos(x+1)+1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\cos^2(x+1)-1}{(x+1)(\cos(x+1)+1)}=$$

$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{-\operatorname{sen}^2(x+1)}{(x+1)(\cos(x+1)+1)}=-\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(x+1)}{x+1}\times\frac{\operatorname{sen}(x+1)}{\cos(x+1)+1}\right)\underset{i)}{=}-\underbrace{\lim_{y\to0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}_{\text{limite notável}}\times\lim_{y\to0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y+1}$$

$$=-1\times\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)+1}=-1\times\frac{0}{1+1}=-1\times0=0$$

i) Mudança de variável: Se $x\to-1^-$ então $x+1\to0^-$. Seja $y=x+1$, $y\to0^-$.

Como $f(-1)=\ln a$, tem-se $\ln a=0\Leftrightarrow a=\mathrm{e}^0\Leftrightarrow a=1$ (obviamente que se fica a saber que $f(-1)=0$).

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x+1}{-e^{x+2}+e}+ae^b\right)\underset{a=1}{=}\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x+1}{-e^{x+2}+e}+e^b\right)\underset{ii)}{=}e^b+\lim_{y\to0^+}\frac{y}{-e^{y-1+2}+e}=$$

$$=e^b+\lim_{y\to0^+}\frac{y}{-e^{y+1}+e}=e^b+\lim_{y\to0^+}\frac{y}{-e^y\times e+e}=e^b+\lim_{y\to0^+}\frac{y}{-e(e^y-1)}=$$

$$=e^b-\frac{1}{e}\times\lim_{y\to0^+}\frac{y}{e^y-1}\underset{iii)}{=}e^b-\frac{1}{e}\times1=e^b-\frac{1}{e}$$

ii) Mudança de variável: Se $x\to-1^+$ então $x+1\to0^+$. Seja $y=x+1\Leftrightarrow x=y-1$, $y\to0^+$.

iii) Se $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (limite notável), então $\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$.

Portanto, como $f(-1)=0$, tem-se $e^b-\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow e^b=\frac{1}{e}\Leftrightarrow e^b=e^{-1}\Leftrightarrow b=-1$.

8.

▪ As coordenadas do ponto Q são do tipo $(x,5)$. Como $Q\in r$, substituindo as coordenadas de Q na equação vetorial de r vem:

$$(x,5)=(-3,11)+k(-2,3),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3-2k\\5=11+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\\-3k=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3-2\times(-2)\\k=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\k=-2\end{cases}$$

Portanto, $Q(1,5)$.

▪ A reta r é tangente á circunferência de centro em $C(a,b)$ no ponto Q, logo:

$$\overrightarrow{QC}\cdot\vec{r}=0 \Leftrightarrow (a-1,b-5)\cdot(-2{,}3)=0 \Leftrightarrow -2a+2+3b-15=0 \Leftrightarrow -2a+3b=13$$

Além disso os pontos Q e O pertencem à circunferência, assim:

$$(1-a)^2+(5-b)^2=(0-a)^2+(0-b)^2 \Leftrightarrow 1-2a+a^2+25-10b+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 26-2a-10b=0$$

Formando um sistema com estas duas equações, determina-se as coordenadas do ponto C, centro da circunferência. Assim:

$$\begin{cases}-2a+3b=13\\26-2a-10b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3b-13=2a\\26-(3b-13)-10b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\39-13b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\-13b=-39\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=3\times3-13\\b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$$

Logo as coordenadas do ponto C são $(-2{,}3)$.

▪ O triângulo $[OCQ]$ é retângulo em C se e só se $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{QC}=0$. Assim:

$$[OCQ]$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{QC}=(-2{,}3)\cdot(-3,-2)=6-6=0$$

Portanto, o triângulo $[OCQ]$ é retângulo em C. Como $\overline{OC}=\overline{CQ}=\sqrt{13}$ e $O\hat{C}Q=\frac{\pi}{2}$, então:

$$A_{colorida}=A_{setorOCQ}-A_{[OCQ]}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\times\overline{OC}^2-\frac{\overline{OC}\times\overline{CQ}}{2}=\frac{\pi}{4}\times\left(\sqrt{13}\right)^2-\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}{2}=\frac{13\pi}{4}-\frac{13}{2}=\frac{13\pi-26}{4}$$

Cálculos auxiliares:

$\overrightarrow{OC}=C-O=(-2{,}3)-(0{,}0)=(-2{,}3)$; $\overrightarrow{QC}=C-Q=(-2{,}3)-(1{,}5)=(-3,-2)$; $\overline{OC}=\|\overrightarrow{OC}\|=\sqrt{(-2)^2+3^3}=\sqrt{13}$.