

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME-TIPO 7**

**GRUPO I – ÍTENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA**

1. Nas condições do enunciado, o número de triângulos que se podem formar com três dos doze pontos é  ${}^5C_2 \times {}^7C_1 + {}^5C_1 \times {}^7C_2 = 175$  (dos cinco pontos da reta  $r$  escolhem-se dois e dos sete pontos da reta  $s$  escolhe-se um ou dos cinco pontos da reta  $r$  escolhe-se um e dos sete pontos da reta  $s$  escolhem-se dois).

**Resposta: C**

2. Os acontecimentos  $A$  e  $B$  são incompatíveis, portanto,  $A \cap B = \emptyset$  e  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . Tem-se:

$$P(A|\bar{B}) = b \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = b \Leftrightarrow \frac{P(A)}{P(\bar{B})} = b \Leftrightarrow \frac{a}{P(\bar{B})} = b \Leftrightarrow a = b \times P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{B}) = \frac{a}{b}$$

i) Como  $A$  e  $B$  são incompatíveis então,  $A \cap B = \emptyset$  e portanto  $A \subset \bar{B} \Rightarrow A \cap \bar{B} = A$ .

▪ Pretende-se determinar a probabilidade de ocorrer o acontecimento contrário de  $B$ , sabendo que o acontecimento contrário de  $A$  ocorre, isto é,  $P(\bar{B}|\bar{A})$ . Assim:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{A})} = \frac{1 - (P(A) + P(B))}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(B) - P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{B}) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{a}{b} - a}{1 - a} = \frac{\frac{a - ab}{b}}{1 - a} = \frac{a(1 - b)}{b(1 - a)}$$

**Resposta: B**

3.

▪ O vetor  $\vec{r} = (-2, -2, 2)$  é um vetor diretor da reta  $r$ . Como  $s: 2y = x \wedge z = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \wedge z = 0$ , então o vetor  $\vec{s} = (2, 1, 0)$  é um vetor diretor da reta  $s$ . Assim

$$\cos \theta = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|(-2, -2, 2) \cdot (2, 1, 0)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-2 \times 2 - 2 \times 1 + 2 \times 0|}{\sqrt{12} \times \sqrt{5}} = \frac{|-6|}{\sqrt{60}} = \frac{6}{2\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

▪ Tem-se,  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{15}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{10}{25} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{10}{25}}$

Como  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ( $\theta$  é a amplitude do ângulo formado pelas retas  $r$  e  $s$ ), então  $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

▪ Portanto,  $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{2\sqrt{150}}{25} = \frac{2 \times 5\sqrt{6}}{25} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ .

**Resposta: A**

4. Sendo  $B$  o ponto de interseção do eixo  $Ox$  com a reta que contém o ponto  $Q$  e é paralela ao eixo  $Oy$ , vem  
 $A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{BQ}}{2}$ .

▪  $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+6} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+6} = 1 \Leftrightarrow e^{-2x+6} = e^0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ . Logo,  $P(3, 0)$  e portanto  $\overline{OP} = 3$ .

▪  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x - x = e^{-2x+6} - x \Leftrightarrow e^x = e^{-2x+6} \Leftrightarrow x = -2x + 6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Logo,  $Q(2, f(2))$  e  $B(2, 0)$ . Como  $f(2) = e^2 - 1$ , vem  $Q(2, e^2 - 1)$  e portanto  $\overline{BQ} = e^2 - 1$ .

Assim,  $A_{[OPQ]} = \frac{3 \times (e^2 - 1)}{2} = \frac{3}{2}(e - 1)(e + 1)$ .

**Resposta: A**

5. Como a função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , então também o é em  $x = a$ . A função  $g$  é contínua em  $x = a$  se e só se  
 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$ , assim:

▪  $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} e^{-\ln(-h(x))} = e^{-\ln(-h(a))} = e^{-\ln 3} = e^{\ln(3^{-1})} = e^{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$

i) A função  $h$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, a]$ , logo é injetiva e portanto  $a = h^{-1}(-3) \Leftrightarrow h(a) = -3$ .

▪  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \log_8(x + 2) = \log_8(a + 2)$

▪  $g(a) = e^{-\ln(-h(a))} = \frac{1}{3}$

Logo,  $\log_8(a + 2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a + 2 = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow a + 2 = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow a + 2 = 2 \Leftrightarrow a = 0$ .

**Resposta: D**

6. Como  $a \in ]0, \pi[ \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ , vem  $0 < \text{sen}(a) < 1$  e portanto  $\ln(\text{sen}(a)) < 0 \Leftrightarrow -\ln(\text{sen}(a)) > 0$ .

Logo,  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$  é um mínimo relativo da função  $f$ .

**Resposta: D**

7. A resposta correta é a **C**. De facto, fazendo  $z = x + yi$ , vem:

$$\begin{aligned} |\bar{z} - 2 + i| = |z - i| &\Leftrightarrow |x - yi - 2 + i| = |x + yi - i| \Leftrightarrow |x - 2 + i(1 - y)| = |x + i(y - 1)| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x - 2)^2 + (1 - y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (1 - y)^2 = x^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 \\ &\Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

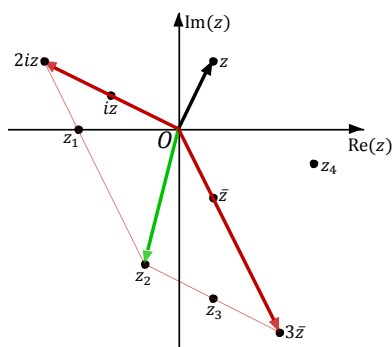
Portanto, a condição  $|\bar{z} - 2 + i| = |z - i|$  representa a reta vertical (paralela ao eixo imaginário) que contém o ponto de coordenadas (1, 0).

Resposta: **C**

8. Tem-se que  $i^{-41} = i^{4 \times (-11) + 3} = i^3 = -i$ . Assim:

$$\frac{2z}{i^{-41}} + 3\bar{z} = \frac{2z}{-i} + 3\bar{z} = \frac{2z}{-i} \times \frac{i}{i} + 3\bar{z} = \frac{2zi}{-i^2} + 3\bar{z} = \frac{2zi}{1} + 3\bar{z} = 2zi + 3\bar{z}$$

Vamos utilizar a regra do paralelogramo para resolver este problema:



$$\text{Logo, } \frac{2z}{i^{-41}} + 3\bar{z} = 2zi + 3\bar{z} = z_2$$

Resposta: **B**

**GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA**

1.

1.1.

▪  $z_1 = (-3 + i)i = -3i + i^2 = -1 - 3i$ , assim:

$$\begin{aligned} (z_1)^3 &= (-1 - 3i)^3 = (-1 - 3i)^2 \times (-1 - 3i) = (1 + 6i + 9i^2)(-1 - 3i) = (-8 + 6i)(-1 - 3i) = \\ &= 8 + 24i - 6i - 18i^2 = 26 + 18i \end{aligned}$$

▪  $z_2 = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1^2-i^2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$ . Logo,  $\bar{z}_2 = 2 - i$

Portanto:

$$z^4 + (z_1)^3 - \bar{z}_2 = 19i - 57 \Leftrightarrow z^4 + 26 + 18i - 2 + i = 19i - 57 \Leftrightarrow z^4 + 24 + 19i = 19i - 57 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4 = -81 \Leftrightarrow z^4 = 81 \operatorname{cis} \pi \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{81 \operatorname{cis} \pi}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{81} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow z = 3 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Para  $k = 0$  vem  $z = 3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = 3 \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) = 3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

Para  $k = 1$  vem  $z = 3 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = 3 \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

Para  $k = 2$  vem  $z = 3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} = 3 \left( \cos \left( \frac{5\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right) = 3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

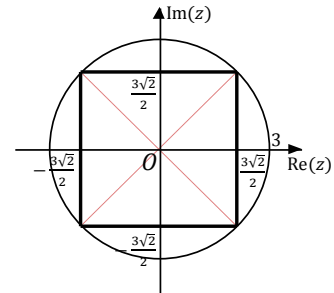
Para  $k = 3$  vem  $z = 3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} = 3 \left( \cos \left( \frac{7\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{4} \right) \right) = 3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

O conjunto solução da equação  $z^4 + (z_1)^3 - \bar{z}_2 = 19i - 57$  é:

$$\left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i \right\}$$

Representando o quadrado cujos vértices são as soluções da equação:

A medida do lado do quadrado é igual a  $2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ , logo a sua área é igual a  $(3\sqrt{2})^2 = 18$ .



1.2. Tem-se  $\frac{w^3 \times z_2}{z_1} = \frac{(\text{cis } \alpha)^3 \times \frac{1+3i}{1+i}}{-1-3i} = \frac{\text{cis}(3\alpha) \times (1+3i)}{-(1+3i)(1+i)} = \frac{\text{cis}(3\alpha)}{-1-i} = \frac{\text{cis}(3\alpha)}{\sqrt{2} \text{cis} \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{cis} \left( 3\alpha - \frac{5\pi}{4} \right)$

i) **Cálculo auxiliar:** Para escrever  $-1 - i$  na forma trigonométrica, vem:  $|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ . Sendo  $\theta$  um argumento de  $-1 - i$ , tem-se  $\text{tg } \theta = \frac{-1}{-1} = 1$  e  $\theta \in 3.^\circ$  quadrante, pelo que  $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ . Assim,  $-1 - i = \sqrt{2} \text{cis} \frac{5\pi}{4}$ .

A imagem geométrica de  $\frac{w^3 \times z_2}{z_1}$  pertence à bissetriz dos quadrantes pares se o seu argumento for da forma  $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim:

$$3\alpha - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Logo,  $\alpha = \frac{5\pi}{3}$  ( $k = 4$ ).

2. Seja  $w = \rho \text{cis} \theta$ . Se  $w$  e  $\overline{-w}$  são raízes de índice  $n$  de um número complexo  $z$ , então  $z = w^n$  e  $z = (\overline{-w})^n$  e portanto  $w^n = (\overline{-w})^n$ .

Como

$$w^n = \rho^n \text{cis}(n\theta) \quad \text{e} \quad (\overline{-w})^n = (\overline{-\rho \text{cis } \theta})^n = (\overline{\rho \text{cis}(\theta + \pi)})^n = (\rho \text{cis}(-\theta - \pi))^n = \rho^n \text{cis}(-n\theta - n\pi),$$

vem:

$$w^n = (\overline{-w})^n \Leftrightarrow \rho^n \text{cis}(n\theta) = \rho^n \text{cis}(-n\theta - n\pi) \Leftrightarrow \text{cis}(n\theta) = \text{cis}(-n\theta - n\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\theta = -n\theta - n\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n\theta = -n\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n\theta = -\frac{n\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\theta = -\frac{n\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo,  $z = w^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) = \rho^n \operatorname{cis}\left(-\frac{n\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

Como  $n$  é um número natural ímpar, então  $n = 2p - 1, p \in \mathbb{N}$  e portanto o argumento de  $z$  é da forma:

$$-\frac{(2p-1)\pi}{2} + k\pi = -\frac{2p\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} - p\pi + k\pi = \frac{\pi}{2} + (k - p)\pi, p \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

(Como  $p \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , obviamente que  $k - p \in \mathbb{Z}$ )

Conclui-se então que a imagem geométrica de  $z$  pertence ao eixo imaginário, ou seja,  $z$  é um imaginário puro.

### 3.

**3.1.** Considere-se os acontecimentos  $T$ : «o automóvel escolhido tem matrícula portuguesa» e  $B/C/D$ : «o automóvel escolhido é um(a) «berlina» / carrinha / desportivo». Do enunciado tem-se que:

$$P(T) = 80\% = 0,8; \quad P(B|T) = 64\% = 0,64; \quad P(C|T) = 31\% = 0,31; \quad P(D \cap \bar{T}) = 3\% = 0,03 \quad \text{e} \\ P(B) = 2P(C)$$

Assim:

- $P(B|T) = 0,64 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = 0,64 \Leftrightarrow P(B \cap T) = 0,64 \times 0,8 = 0,512$
- $P(C|T) = 0,31 \Leftrightarrow \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = 0,31 \Leftrightarrow P(C \cap T) = 0,31 \times 0,8 = 0,248$

Colocando estes valores numa tabela de dupla entrada, vem:

	$B$	$C$	$D$	p.m.
$T$	0,512	0,248	0,04	0,8
$\bar{T}$			0,03	0,2
p.m.			0,07	1

#### Justificações:

- $P(D \cap T) = 0,8 - 0,512 - 0,248 = 0,04$
- $P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \bar{T}) = 0,04 + 0,03 = 0,07$

Tem-se  $P(B) + P(C) + P(D) = 1$ , como  $P(B) = 2P(C)$ , vem:

$$2P(C) + P(C) + 0,07 = 1 \Leftrightarrow 3P(C) = 0,93 \Leftrightarrow P(C) = 0,31$$

Portanto,  $P(B) = 2 \times 0,31 = 0,62$ . Terminando o preenchimento da tabela:

	B	C	D	p.m.
T	0,512	0,248	0,04	0,8
$\bar{T}$	0,108	0,062	0,03	0,2
p.m.	0,62	0,31	0,07	1

**Justificações:**

- $P(B \cap \bar{T}) = 0,62 - 0,512 = 0,108$

- $P(C \cap \bar{T}) = 0,31 - 0,248 = 0,062$

Logo,  $P(\bar{T}|B) = \frac{P(\bar{T} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,108}{0,62} \approx 0,17$ .

**3.2.** Considere-se a variável aleatória  $X$ : «número de habitantes com olhos azuis presentes na festa em  $n$ ». A variável aleatória  $X$  segue uma distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $p = 0,08$ , isto é,  $X \sim \text{Bin}(n; 0,08)$ . Pretende-se determinar  $n$  de modo que a probabilidade de pelo menos um dos presentes na festa ter olhos azuis seja de  $0,95$ , isto é,  $P(X \geq 1) = 0,95$ . Assim:

$$P(X \geq 1) = 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) = 0,95 \Leftrightarrow -P(X = 0) = -0,05 \Leftrightarrow P(X = 0) = 0,05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^n C_0 \times (0,08)^0 \times (0,92)^n = 0,05 \Leftrightarrow (0,92)^n = 0,05$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{0,92}(0,05) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,92)} \approx 36$$

Logo,  $n \approx 36$ , ou seja, para que a probabilidade de pelo menos um dos presentes ter olhos azuis ser de  $0,95$ , têm de estar na festa 36 habitantes da localidade.

**4.** Considere-se a variável aleatória  $Y$ : «produto dos números inscritos nas cinco bolas extraídas». O produto das cinco bolas extraídas pode ser:

- $-12$ , se entre as cinco bolas extraídas não existirem bolas numeradas com o número 0;
- $0$ , se pelo menos uma das cinco bolas extraídas estiver numerada com o número 0.

Assim,  $Y = \{-12, 0\}$  e portanto tem-se  $P(Y = -12) = \frac{{}^5 C_5}{{}^7 C_5} = \frac{1}{21}$  e  $P(Y = 0) = \frac{{}^2 C_1 \times {}^5 C_4 + {}^2 C_2 \times {}^5 C_3}{{}^7 C_5} = \frac{20}{21}$ .

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória  $Y$  é dada por:

$y_i$	-12	0
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{20}{21}$

O valor médio da variável aleatória  $Y$  é dado por  $\mu = -12 \times \frac{1}{21} + 0 \times \frac{20}{21} = -\frac{4}{7}$ , ou seja, em cada realização da experiência o “produto médio” (ou “produto esperado”) é de  $-\frac{4}{7}$ , portanto em 14 000 realizações desta experiência é de esperar que a soma dos produtos obtidos esteja próxima de  $-\frac{4}{7} \times 14000 = -8000$ .

5.

5.1.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \ln(x^2 + 4) - x^2 \ln(x^2)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \ln(x^2 + 4)) - \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \ln(x^2)) = \\ &= \overbrace{0 \times \ln 4}^0 - \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \ln(x^2)) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \ln(x^2)) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \underset{i)}{-} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y} \times \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right) \\ &\stackrel{ii)}{=} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{-\ln y}{y} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{limite notável}} = 0 \end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** Se  $x \rightarrow 0^-$  então  $x^2 \rightarrow 0^+$  e portanto  $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ . Seja  $y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}, y \rightarrow +\infty$ .

ii)  $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln 1 - \ln y = 0 - \ln y = -\ln y$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -x^3 e^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \underset{iii)}{\lim_{y \rightarrow +\infty}} \left( -\left(\frac{1}{y}\right)^3 e^y \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y^3} \times e^y \right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^3}}_{\text{limite notável}} = -\infty$$

iii) **Mudança de variável:** Se  $x \rightarrow 0^+$  então  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ . Seja  $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}, y \rightarrow +\infty$ .

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

▪ Assíntotas verticais

Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ , logo a reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical do gráfico de  $g$ . Como a função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então o gráfico de  $g$  não tem mais assíntotas verticais.



- Assíntotas não verticais

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 \ln(x^2 + 4) - x^2 \ln(x^2))}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2))}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2)) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \\
 &\stackrel{i)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{y} \times \ln(1 + 4y^2)\right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+4y^2)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{\ln(1+4y^2)}{4y^2} \times 4y\right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+4y^2)}{4y^2} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} (4y) = 1 \times 4 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

↓  
Se  $y \rightarrow 0^-$  então  $4y^2 \rightarrow 0^+$  (limite notável)

i) **Mudança de variável:** Se  $x \rightarrow -\infty$  então  $\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$ . Seja  $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}, y \rightarrow 0^-$ . Portanto  $\frac{4}{x^2} = 4 \times \frac{1}{x^2} = 4 \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4y^2$ .

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 \ln(x^2 + 4) - x^2 \ln(x^2)) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2)) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{x^2} = \ln\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{x^2}\right) = \ln(e^4) = 4
 \end{aligned}$$

↓  
Se  $x \rightarrow -\infty$  então  $x^2 \rightarrow +\infty$

**Outra resolução para o cálculo de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx)$ :**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \stackrel{ii)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} \times \ln(1 + 4y)\right) = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} \times \ln(1 + 4y)\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4y)}{y} = 4 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4y)}{4y} = 4 \times 1 = 4
 \end{aligned}$$

↓  
Se  $y \rightarrow 0^+$  então  $4y \rightarrow 0^+$  (limite notável)

ii) **Mudança de variável:** Se  $x \rightarrow -\infty$  então  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0^+$ . Seja  $y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}, y \rightarrow 0^+$ .

A reta de equação  $y = 4$  é assíntota horizontal do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 e^{\frac{1}{x}}}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 e^{\frac{1}{x}} \right) = -(+\infty)^2 \times e^{\frac{1}{+\infty}} = -\infty \times e^0 = -\infty \times 1 = -\infty$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$  o gráfico de  $g$  não tem assíntotas.

**5.2.** Para  $x < 0$  tem-se  $g(x) = x^2(\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2))$ , assim:

$$g'(x) = 2x(\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2)) + x^2 \left( \frac{2x}{x^2+4} - \frac{2x}{x^2} \right) = 2x(\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2)) + x^2 \left( \frac{2x}{x^2+4} - \frac{2}{x} \right)$$

Portanto,  $h'(1) = g'(-2) = -4(\ln 8 - \ln 4) + 4 \left( \frac{-4}{8} - \frac{2}{-2} \right) = -4 \ln \left( \frac{8}{4} \right) + 2 = 2 - 4 \ln 2$ .

Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2h(1) - 2h(x)}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(h(x) - h(1))}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{h(x) - h(1)}{x-1} \times \frac{-2}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x+3} = h'(1) \times \frac{-2}{4} = \\ &= -\frac{1}{2} \times g'(-2) = -\frac{1}{2} \times (2 - 4 \ln 2) = 2 \ln 2 - 1 = \ln(2^2) - \ln e = \ln \left( \frac{4}{e} \right) \end{aligned}$$

**i) Cálculo auxiliar:**  $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$ , logo  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ .

**6**

**6.1.** Tem-se,  $g(x) = e^{-(x-1)^2} + e^{(x-1)^2-2} + 2$ . Assim:

- $g'(x) = -2(x-1)e^{-(x-1)^2} + 2(x-1)e^{(x-1)^2-2} = 2(x-1)(e^{(x-1)^2-2} - e^{-(x-1)^2})$
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(e^{(x-1)^2-2} - e^{-(x-1)^2}) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \vee e^{(x-1)^2-2} - e^{-(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee e^{(x-1)^2-2} = e^{-(x-1)^2} \Leftrightarrow x = 1 \vee (x-1)^2 - 2 = -(x-1)^2$   
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee 2(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee (x-1)^2 = 1$   
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x-1 = -1 \vee x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0 \vee x = 2$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função  $f'$ , vem:

$x$	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$2(x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$e^{(x-1)^2-2} - e^{-(x-1)^2}$	+	0	-	-	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	min.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	min.	$\nearrow$

$g$  é decrescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[1, 2]$ , é crescente em  $[0, 1]$  e em  $[2, +\infty[$ , tem mínimo relativo em  $x = 0$  e em  $x = 2$  e tem máximo relativo em  $x = 1$ .

**6.2.** A área do trapézio  $[ABCD]$  é dada por  $\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times h$ , onde  $h$  é a medida da altura do trapézio, pelo que  $h = f(2) - f(x)$ . Assim, como:

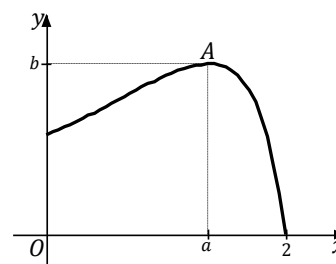
$$f(2) - f(x) = (e^{-2^2} + e^{2^2-2}) - (e^{-x^2} + e^{x^2-2}) = e^{-4} + e^2 - e^{-x^2} - e^{x^2-2},$$

vem:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times h = \frac{4+2x}{2} \times h = (2+x)(e^{-4} + e^2 - e^{-x^2} - e^{x^2-2})$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se a função  $y_1 = (2+x)(e^{-4} + e^2 - e^{-x^2} - e^{x^2-2})$  na janela de visualização  $[0, 2] \times [0, 25]$ .

Logo, as coordenadas do ponto  $A$  são  $(a, b)$ , com  $a \approx 1,36$  e  $b \approx 21,47$  (a área do trapézio é máxima em  $x = a$ ).



7.

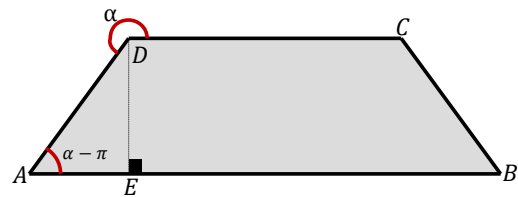
- O perímetro do trapézio  $[ABCD]$  é dado por  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \stackrel{BC=DA}{=} \overline{AB} + 2\overline{AD} + \overline{CD}$ .

Seja  $\theta = D\hat{A}B = A\hat{B}C$ . Tem-se que  $A\hat{D}C = 2\pi - \alpha$  (ângulo interno) e também  $B\hat{C}D = 2\pi - \alpha$ , assim:

$$\theta + \theta + 2\pi - \alpha + 2\pi - \alpha = 2\pi \Leftrightarrow 2\theta - 2\alpha = -2\pi \Leftrightarrow 2\theta = 2\alpha - 2\pi \Leftrightarrow \theta = \alpha - \pi$$

Assim:

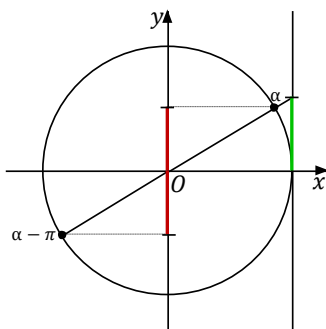
- $\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{k}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{k}{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)} \stackrel{i)}{\Leftrightarrow} \overline{AE} = \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha}$
- $\operatorname{sen}(\alpha - \pi) = \frac{k}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{k}{\operatorname{sen}(\alpha - \pi)} \stackrel{i)}{\Leftrightarrow} \overline{AD} = -\frac{k}{\operatorname{sen} \alpha}$



Logo, como  $\overline{DE} = k$  vem,  $\overline{CD} = 2\overline{DE} = 2k$  e  $\overline{AB} = \overline{CD} + 2\overline{AE} = 2k + \frac{2k}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} P_{[ABCD]} &= \overline{AB} + 2\overline{AD} + \overline{CD} = 2k + \frac{2k}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2k}{\operatorname{sen} \alpha} + 2k = 2k \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + 1 \right) = \\ &= 2k \left( 2 + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = 2k \left( 2 + \frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = p(\alpha) \end{aligned}$$

i) Figura auxiliar:



$$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \pi) = -\operatorname{sen} \alpha$$

▪ A função  $p$  é contínua em  $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ , pois é quociente e soma entre funções contínuas. Logo, a função  $p$  também é contínua em  $\left[ \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right] \subset \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ . Tem-se:

$$\bullet p\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2k \left( 2 + \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1}{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)} \right) = 2k \left( 2 + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2}} \right) = 2k \left( 2 + \frac{\frac{\sqrt{3}+2}{1}}{\frac{1}{2}} \right) = 2k(2 + \sqrt{3} + 2) = 2k(4 + \sqrt{3})$$

Como  $1 < \sqrt{3} < 2$ , vem  $5 < 4 + \sqrt{3} < 6 \stackrel{k>0}{\Leftrightarrow} 10k < 2k(4 + \sqrt{3}) < 12k$  e portanto  $p\left(\frac{7\pi}{6}\right) > 9k$ .

$$\bullet p\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2k \left( 2 + \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1}{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \right) = 2k \left( 2 + \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = 2k \left( 2 + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = 2k \left( 2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = 2k \left( 2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 2k \left( 2 + \frac{3\sqrt{3}}{3} \right) = 2k(2 + \sqrt{3})$$

Como  $1 < \sqrt{3} < 2$ , vem  $3 < 2 + \sqrt{3} < 4 \stackrel{k>0}{\Leftrightarrow} 6k < 2k(2 + \sqrt{3}) < 8k$  e portanto  $p\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 9k$ .

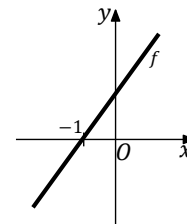
Assim, como  $p\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 9k < p\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ , pelo teorema de Bolzano existe pelo menos um  $\theta \in \left] \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right[$  tal que  $p(\theta) = 9k$ .

**8.** A função  $f$  é afim, portanto é da forma  $f(x) = mx + b$ . Além disso, a função  $f$  é crescente (portanto  $m > 0$ ) pois o seu gráfico interseca o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $-1$  e o eixo  $Oy$  num ponto de ordenada positiva, como evidenciado na figura.

Assim:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x} \times f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{x^2-x} = 0}_{\text{eq. impossível em IR}} \vee f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Fazendo um quadro de variação do sinal da função  $g'$ , vem:

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
i) $g'(x)$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	min.	$\nearrow$

i) Observa que o sinal de  $g'$  depende apenas do sinal de  $f(x)$ , pois  $e^{x^2-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Conclui-se então que a função  $g$  tem um mínimo absoluto em  $x = -1$ , portanto  $g(x) > g(-1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Logo, a afirmação **A** é verdadeira, não sendo esta a opção correta.

Da análise do quadro também se conclui que a função  $g$  é decrescente em  $]-\infty, -1]$ , isto é:

$$\forall x_1, x_2 \in ]-\infty, -1]: x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Assim, como  $a - 2 < a$  e  $a - 1 < a$ , vem  $g(a - 2) > g(a)$  e  $g(a - 1) > g(a)$ , para todo o  $a \in ]-\infty, -1]$  (se  $a$  pertence ao intervalo  $]-\infty, -1]$  então  $a - 2$  e  $a - 1$  também pertencem a esse intervalo). Logo:

$$g(a - 2) + g(a - 1) > g(a) + g(a) \Leftrightarrow g(a - 2) + g(a - 1) > 2g(a), \forall a \in ]-\infty, -1]$$

Logo, a afirmação **C** é verdadeira e portanto esta também não é a opção correta.

Por outro lado, como o ponto de coordenadas  $(-1, 0)$  pertence ao gráfico de  $f$ , vem  $0 = -m + b \Leftrightarrow b = m$ , pelo que  $f(x) = mx + m$ ,  $m > 0$ . Assim tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet g''(x) &= (e^{x^2-x} \times f(x))' = (e^{x^2-x})' \times f(x) + e^{x^2-x} \times f'(x) = \\ &= (2x - 1)e^{x^2-x} \times (mx + m) + me^{x^2-x} = m(2x - 1)(x + 1)e^{x^2-x} + me^{x^2-x} \\ &= me^{x^2-x} \times ((2x - 1)(x + 1) + 1) = me^{x^2-x} \times (2x^2 + x) \\ \bullet g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{me^{x^2-x}}_{\text{eq. impossível em } \mathbb{R}} = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função  $g''$ , vem:

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$0$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

i) Observa que o sinal de  $g''$  depende apenas do sinal de  $2x^2 + x$ , pois  $me^{x^2-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  e  $m > 0$ .

Logo, a afirmação **D** não é a correta pois é verdade que o gráfico da função  $g$  tem a concavidade voltada para cima em  $[0, +\infty[$ .

A opção correta é a **B** (o gráfico da função  $g$  não tem ponto de inflexão em  $x = -1$ , portanto esta afirmação não é verdadeira).

9.

▪ O ponto  $B$  pertence ao plano  $xOy$  e portanto as suas coordenadas são da forma  $(x, y, 0)$ . Como o ponto  $B$  pertence à reta  $BD$ , substituindo-as na condição que define a recta  $BD$ , vem:

$$-x = y = \frac{0 - 8}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto  $B$  são  $(4, -4, 0)$ .

O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e portanto as suas coordenadas são da forma  $(0, y, 0)$ . Como o ponto  $C$  pertence ao plano  $BCD$ , substituindo-as na equação do plano  $BCD$ , vem:

$$6 \times 0 - 8y + 7 \times 0 = 56 \Leftrightarrow -8y = 56 \Leftrightarrow y = -7$$

Logo, as coordenadas do ponto  $C$  são  $(0, -7, 0)$  e consequentemente as coordenadas do ponto  $A$  são  $(|-7| - 2, 0, 0) = (5, 0, 0)$ .

O ponto  $D$  pertence ao eixo  $Oz$  e portanto as suas coordenadas são da forma  $(0, 0, z)$ . Como o ponto  $D$  pertence ao plano  $BCD$  substituindo-as na equação do plano  $BCD$ , vem,  $6 \times 0 - 8 \times 0 + 7z = 56 \Leftrightarrow 7z = 56 \Leftrightarrow z = 8$ . Logo as coordenadas do ponto  $D$  são  $(0, 0, 8)$ .

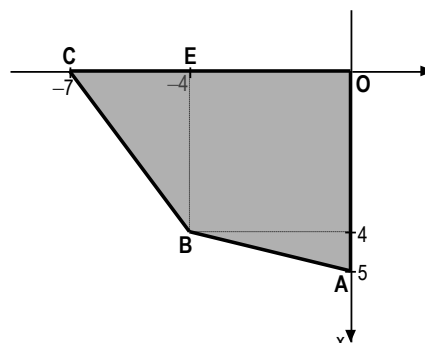
Portanto as coordenadas dos vértices da pirâmide são  $A(5, 0, 0)$ ,  $B(4, -4, 0)$ ,  $C(-7, 0, 0)$ ,  $O(0, 0, 0)$  e  $D(0, 0, 8)$ .

▪ Na figura seguinte está representado o quadrilátero  $[OABC]$  no plano  $xOy$  (Vista de cima):

Assim,

$$\begin{aligned} A_{[OABC]} &= A_{[OABE]} + A_{[BCE]} = \frac{\overline{OA} + \overline{EB}}{2} \times \overline{OE} + \frac{\overline{BE} \times \overline{CE}}{2} = \\ &= \frac{5+4}{2} \times 4 + \frac{4 \times 3}{2} = \frac{9}{2} \times 4 + 6 = 18 + 6 = 24 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } V_{[OABCD]} = \frac{1}{3} \times A_{[OABC]} \times \overline{OD} = \frac{1}{3} \times 24 \times 8 = 8 \times 8 = 64.$$



- Seja  $\vec{n} = (a, b, c)$  um vetor normal ao plano  $ABD$ . Este vetor é perpendicular aos vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AD}$ , dois vetores não colineares do plano  $ABD$ . Assim vem:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1, -4, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (-5, 0, 8) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 4b = 0 \\ -5a + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b = a \\ 8c = 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{4}a \\ c = \frac{5}{8}a \end{cases}$$

Concluimos então que as coordenadas do vetor  $\vec{n}$  são da forma  $(a, -\frac{1}{4}a, \frac{5}{8}a)$ , sendo  $a$  um número real não nulo. Fazendo, por exemplo,  $a = 8$  vem que  $\vec{n} = (8, -2, 5)$  é um vetor normal ao plano  $ABD$ . Logo o plano  $ABD$  pode ser definido por uma equação do tipo  $8x - 2y + 5z + d = 0$ . Como o ponto  $A(5, 0, 0)$  pertence ao plano  $ABD$ , substituindo-o na sua equação vem,  $8 \times 5 - 2 \times 0 + 5 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -40$ . Então uma equação cartesiana do plano  $ABD$  é dada por  $8x - 2y + 5z - 40 = 0 \Leftrightarrow 8x - 2y + 5z = 40$ .

**Cálculos auxiliares:**  $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -4, 0) - (5, 0, 0) = (-1, -4, 0)$ ;  $\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 0, 8) - (5, 0, 0) = (-5, 0, 8)$ .